Axel Mölders

VERFAHREN DER MEHRDIMENSIONALEN SKALIERUNG

Dargestellt anhand von Beispielen aus dem Marketing

1976

1977

VERFAHREN DER MEHRDIMENSIONALEN SKALIERUNG

DARGESTELLT ANHAND VON BEISPIELEN AUS DEM MARKETING

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
durch den Fachbereich
Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Westfälischen Wilhelms-Universität
zu Münster

vorgelegt von
Dipl.-Kfm. Axel Mölders
aus Dortmund

1977

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Erster Berichterstatter: Prof. Dr. J. Bleymüller
Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. H. Gülicher
Dekan: Prof. Dr. H. Meffert
Tag der mündlichen Prüfung: 16. November 1976

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN V
VERZEICHNIS DER ÜBERSICHTEN VII
VERZEICHNIS DER ABKÜRZUNGEN IX

1 EINFÜHRUNG 1

2 DIE EINDIMENSIONALE SKALIERUNG VON MERKMALEN..... 7

2.1 Grundlagen der eindimensionalen Skalierung 7
2.2 Die Nützlichkeit des Skalierens im Marketing ... 12

3 GRUNDGEDANKEN DER MEHRDIMENSIONALEN SKALIERUNG (MDS) 17

3.1 Einordnung der MDS in die multivariate Analyse und Überprüfung der empirischen Relevanz multivariater Analysetechniken 17
3.2 Die Notwendigkeit mehrdimensionaler Skalierungen 24
3.3 Die Grundlagen der MDS-Verfahren 26
3.4 Unterscheidung der MDS-Verfahren nach dem Skalenniveau der Ausgangsdaten 31
3.5 Unterscheidung der MDS-Verfahren nach Inhalt und Zusammenfassung der Ausgangsdaten 34

4 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN ÄHNLICHKEIT UND DISTANZ..... 41

4.1 Skalierung der Ähnlichkeit 41
4.2 Begriff und Bedeutung der MINKOWSKI-Metriken ... 45
4.3 Eigenschaften von MINKOWSKI-Metriken 49

5 DIE METRISCHE MEHRDIMENSIONALE SKALIERUNG (MMDS).... 55

5.1 Grundgedanken der MMDS 55
5.2 Schätzung der additiven Konstanten 57
5.3 Dimensionsdeterminierung und Koordinatenwertbestimmung 64
5.4 Ein hypothetisches Beispiel zur MMDS 68

Seite

6 DIE NICHTMETRISCHE MEHRDIMENSIONALE SKALIERUNG (NMDS) 79

6.1 Grundgedanken der NMDS 79
6.2 Fixierung einer Ausgangskonfiguration und Normierung einer beliebigen Konfiguration 86
6.3 Verfahren der monotonen Regression 95
6.4 Ermittlung der Anpassungsgüte 99
6.5 Iterativer Anpassungsalgorithmus 104

7 NICHTAGGREGIERENDE MDS-VERFAHREN 113

7.1 Problematik der Aggregation und Notwendigkeit der Disaggregation 113
7.2 Disaggregierte Verarbeitung von Ähnlichkeitsdaten 114
7.3 Disaggregierte Verarbeitung von Präferenzdaten 119

8 SPEZIELLE PROBLEME BEI DER PRAKTISCHEN ANWENDUNG DER MDS IN DER MARKTFORSCHUNG 123

8.1 Anzahl und Art der zu untersuchenden Objekte ... 123
8.2 Möglichkeiten der Datenerhebung 126
8.3 Anzahl der Dimensionen und ihre Interpretation 132

9 EXEMPLARISCHE DARSTELLUNG VERSCHIEDENER ANWENDUNGSBEREICHE DER MDS IN DER MARKTFORSCHUNG 139

9.1 Die Anwendung von MDS-Techniken im Marketing ... 139
9.2 Imageanalyse 140
9.3 Produktpositionierung 155
9.4 Ein Vorschlag zur Marktsegmentierung 159

10 SCHLUSSBEMERKUNGEN 167

VERZEICHNIS DER SYMBOLE 173

LITERATURVERZEICHNIS 177

ANHANG 191

Partielle Ableitung der Stressfunktion nach den Koordinatenwerten 193

VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN

Seite

Abb. 1: Hypothetische Lage von fünf Automobilmarken im zweidimensionalen Wahrnehmungsraum 27

Abb. 2: Die Lage von fünf Produkten im zweidimensionalen Wahrnehmungsraum 35

Abb. 3: Vektordarstellung für die Präferenzfolge: A > B > C > D > E 36

Abb. 4: Idealpunkt (o) mit Isopräferenzlinien für die Rangordnung: C > B > D > E > A 37

Abb. 5: Darstellung der monotonen Beziehung zwischen Präferenzrang und Idealpunkt-Objekt-Distanz 38

Abb. 6: Darstellung der (Un-)Ähnlichkeitswerte e_{ij} ($\bar{e}_{ij}$) für die Objektpaare 41

Abb. 7: Die Lage von n = 3 Zubereitungsarten von Kaffee im zweidimensionalen Raum 48

Abb. 8: Darstellung von Linien und Körpern gleicher Ähnlichkeit 52

Abb. 9: Originalkonfiguration der Punkte 1,2,3 und 4 im zweidimensionalen Raum 68

Abb. 10: Reproduzierte Konfiguration für die Punkte 1,2,3 und 4 im zweidimensionalen Raum 77

Abb. 11: Darstellung einer Konfiguration von n=3 Punkten i,j und k mit den Distanzrelationen: $d_{ij} = d_{jk} > d_{ik}$ 83

Abb. 12: Darstellung einer willkürlichen Ausgangskonfiguration für n = 4 Objekte in r = 2 Dimensionen 90

Abb. 13: Darstellung einer zufälligen Ausgangskonfiguration für n = 4 Objekte in r = 2 Dimensionen 91

Abb. 14: Darstellung einer rationalen Ausgangskonfiguration für n = 4 Objekte in r = 2 Dimensionen 92

Abb. 15: Darstellung der 'Regressionslinie' zwischen Unähnlichkeitswerten $\bar{e}_{ij}$ und Distanzen d_{ij} 96

Abb. 16: Darstellung der schwach monotonen Regressionskurve 97

Abb. 17: Zusammenhang zwischen Stress S_1 und Koordinatenwert x_{it} eines Punktes 110

Seite

Abb. 18: Hypothetischer aggregierter zweidimensionaler Objektraum 115

Abb. 19: Zweidimensionaler Vpn-Raum zur Darstellung der personenspezifischen Dimensionsgewichte 116

Abb. 20 Personenspezifische Wahrnehmungsräume für fünf ausgewählte Vpn 117

Abb. 21: Subjektvektoren für zwei Vpn hinsichtlich ihrer Präferenzrangordnungen für fünf Objekte 119

Abb. 22: Wahrnehmung der Objekte A,B,C,D und E und Lage der Idealpunkte für zwei Vpn 121

Abb. 23: Darstellung von ellipsenförmigen Isopräferenzlinien für zwei Vpn 121

Abb. 24: Simultane Skalierung von Produkteigenschaften (+), Automobilmarken (•) und Käuferstereotypen (o) 125

Abb. 25: Die Abhängigkeit zwischen der Erhebungszeit (in Min.) und der Anzahl der Objekte 130

Abb. 26: Der Zusammenhang zwischen der Anpassungsgüte (Stress) und der Dimensionenzahl (r) 133

Abb. 27: Die Lage eines Eigenschaftsvektors (Wirtschaftlichkeit) in der Konfiguration für 5 Autotypen 136

Abb. 28: Zweidimensionale Darstellung von 26 deutschen Publikumszeitschriften mit Hilfe der nichtmetrischen mehrdimensionalen Skalierung 147

Abb. 29: Die Interpretation der Dimensionen der MDS-Lösung mit Hilfe des Vektormodells 150

Abb. 30: Die Positionierung von 26 deutschen Publikumszeitschriften im Image-(Faktor)-raum mit Hilfe der Faktorenanalyse 152

Abb. 31: Dreidimensionale Repräsentation realer (•) und fiktiver (◎) Produkte 157

Abb. 32: Dimensionsgewichte für 40 Vpn 162

Abb. 33: Gemeinsamer Raum für Fruchtsäfte (•) und Idealpunkte (o) Untergruppe G_{11} 163

Abb. 34: Wahrnehmungsräume für G_{21} und G_{22} von Fruchtsäften (•) und die Lage der Idealpunkte (o) ... 164

VERZEICHNIS DER ÜBERSICHTEN

Seite

Übers. 1: Schematische Darstellung des Meßvorganges 10

Übers. 2: Einordnung der mehrdimensionalen Skalierung (MDS) in die multivariate Analyse 19

Übers. 3: Anzahl der ausgefüllten Fragebögen in der Stichprobe, gegliedert nach den einzelnen Dritteln der 30 größten deutschen Werbeagenturen 21

Übers. 4: Die Anzahl der Anwender ausgewählter multivariater Verfahren in der Stichprobe 21

Übers. 5: Die Anwendungsbereiche der MDS-Verfahren im Marketing, gegliedert nach der Häufigkeit der Nennungen durch MDS-Anwender in der Stichprobe 22

Übers. 6: Die Klassifikation der MDS-Verfahren mittels der Input-Outputbeziehungen 33

Übers. 7: Schematische Darstellung der Vorgehensweise der metrischen mehrdimensionalen Skalierung nach TORGERSON 56

Übers. 8: Schematische Darstellung der Vorgehensweise bei der NMDS (Flußdiagramm)..... 87

Übers. 9: Blockverschmelzung bei der monotonen Regression (innere Iteration) 96

Übers. 10: Rechenzeit des TRICON-Programmes pro Vp bei alternativen Objektumfängen 130

Übers. 11: Fragebogenseite zur Erhebung von Imageprofilen für Zeitschriften 143

Übers. 12: Ein Imageprofil für 26 deutsche Publikumszeitschriften - Die Beurteilung erfolgte anhand von 20 bipolaren Eigenschaften 145

Übers. 13: Die Korrelationskoeffizienten für ausgewählte Eigenschaften 149

VERZEICHNIS DER ABKÜRZUNGEN

EDV	Elektronische Datenverarbeitung
INDSCAL	Individual Differences Scaling (Computerprogramm)
JoM	Journal of Marketing
JoMR	Journal of Marketing Research
MA	Multivariate Analyse
MDS	Mehrdimensionale Skalierung
MDSCAL	Multidimensional Scaling (Computerprogramm)
MDPREF	Multidimensional Preference Scaling (Computerprogramm)
MMDS	Metrische mehrdimensionale Skalierung
NMDS	Nichtmetrische mehrdimensionale Skalierung
No.	Nummer
o. V.	ohne Verfasser
o. J.	ohne Jahrgang
PREFMAP	Preference Mapping (Computerprogramm)
PROFIT	Property Fitting (Computerprogramm)
sign	signum
TORSCA	TORGERSON Scaling (Computerprogramm)
TRICON	Triangularisation of Conjoint Data (Computerprogramm)
Vol.	Volume
Vp	Versuchsperson
Vpn	Versuchspersonen
zit.	zitiert

1 EINFÜHRUNG

Marketingprobleme sind häufig nur durch einen komplexen Entscheidungsprozeß zu bewältigen. Dazu bedarf es zunächst einmal der Beschaffung von relevanten Informationen, da erst sie einen rationalen Entschluß ermöglichen. Gelingt es, den Informationsstand im Marketingbereich einer Unternehmung zu erhöhen, so ist damit eine Verbesserung der Entscheidungsqualität verbunden. Viele Ansätze und Modelle beschäftigen sich daher mit dem Versuch der Bereitstellung von Marktinformationen. Insbesondere die Marketingforschung versucht, das Wissen über das Marktgeschehen zu erhöhen. Dabei erbringen mathematisch-statistische Verfahren eine "substantielle Erweiterung" der Kenntnisse[1].

Die Erforschung der komplizierten und vielschichtigen Marktphänomene steht seit Jahren im Mittelpunkt wissenschaftlichen Interesses. Die Fortschritte, die zweifellos auf diesem Gebiet gemacht wurden, sind durch einen Wandel des Erkenntnisobjektes im Marketing gekennzeichnet. Ausgangspunkt älterer Marketingkonzepte war häufig der sog. V e r k ä u f e r m a r k t. Derartige Ansätze beschäftigten sich vorwiegend mit denjenigen unternehmerischen Aktivitäten, die für einen möglichst reibungslosen Distributionsablauf sorgten. Der Produzent stand im Mittelpunkt der Untersuchungen, da die Situation am Markt durch einen Nachfrageüberhang nach Konsumgütern gekennzeichnet war. Neuere Marketingkonzepte basieren, wegen zunehmender Marktsättigung, dagegen häufig auf einem K ä u f e r m a r k t. Das Hauptinteresse des Produzenten konzentriert sich darauf, genügend

---

1 KRAUTTER, J.: Marketing - Entscheidungsmodelle, Wiesbaden 1973, S. 1.

Abnehmer für seine Produkte zu finden[1]. Daher wird zunehmend das Kundenverhalten, welches durch soziodemographische und psychographische Variable beschrieben werden kann, analysiert. Zunächst versuchte man allein durch s o z i o - d e m o g r a p h i s c h e Größen das Kundenverhalten zu erklären. Dazu mußte die Gesamtheit der Käufer in verschiedene Schichten wie Alters-, Einkommens-, Berufs-, Bildungsgruppen usw. unterteilt werden, da jede dieser Schichten durch ein besonderes ökonomisch-relevantes Verhalten gekennzeichnet war. Insbesondere in den hochentwickelten Konsumwirtschaften mußte aber in jüngster Zeit die Erfahrung gemacht werden, daß bestimmte Einkommens-, Bildungskategorien usw. keine eindeutigen Determinanten des Kaufverhaltens mehr sind. Daher muß sich der Anbieter stärker an den Wünschen, Meinungen, Wahrnehmungen, Einstellungen und Bedürfnissen der Kunden, d.h. an p s y c h o g r a p h i s c h e n Größen orientieren. Die modernen konsumentenorientierten Ansätze versuchen also nicht zu klären, w e r Käufer eines Gutes ist, sondern w a r u m jemand ein Produkt kauft[2]. Dabei stehen häufig quasi-homogene Konsumgüter, das sind solche Produkte, die sich funktional kaum voneinander unterscheiden wie z.B. Waschmittel, Biere, Zahnpasten, Benzine u.ä., im Mittelpunkt des Interesses.

Durch die hier skizzierte Schwerpunktverlagerung fort von den absatzwirtschaftlichen Überlegungen der Warenverteilung hin zur umfassenden Beschreibung des komplexen Kundenverhaltens veränderten sich notwendigerweise auch die anzuwendenden Analysetechniken. Da wirtschaftswissenschaftliche Erkenntnisse allein kaum ausreichende Lösungsansätze anbie-

---

1 NIESCHLAG, R., DICHTL, E. und HOERSCHGEN, H.: Marketing, 4. Aufl., Berlin 1971, S.2 f.; KOTLER, P.: Marketing Management, Englewood Cliffs 1967, S.3 ff.

2 NELSON, A.R.: Psyching psychographics. A look at why people buy, in: KING, C.W. und TIGERT, D.J. (Hrsg.): Attitude research reaches new heights, Chicago 1971, S. 181-188, hier S. 181.

ten, werden interdisziplinäre Lösungsversuche[1] immer wichtiger. Insbesondere psychologisch fundierte Techniken sind zur Untersuchung der Motive der Kaufentscheidung geeignet. Dabei sind Skalen, d.h. bestimmte Maßeinteilungen für Objekteigenschaften, ein "besonders leistungsfähiges Hilfsmittel"[2] der Motivforschung. In der Vergangenheit sind zumeist eindimensionale Skalierungsverfahren angewandt worden. Die zu beurteilenden Objekte, z.B. Produkte, wurden von den Konsumenten anhand eines bestimmten Merkmals beurteilt und dann nach festgelegten formalen Vorschriften auf einem eindimensionalen Eigenschaftskontinuum dargestellt. Häufig werden aber bei der Beurteilung der Objekte mehrere Merkmale berücksichtigt, so daß die Objekte nur als Punkte in einem mehrdimensionalen Raum abgebildet werden können. Die s i m u l t a n e Festlegung der Position der Objekte im Raum erfolgt mit Hilfe mehrdimensionaler Skalierungsmethoden (MDS), die in dieser Arbeit beschrieben werden sollen. Außerdem sollen die Anwendungsmöglichkeiten dieser Verfahren zur Lösung bestimmter Marketingprobleme dargestellt werden.

Zu diesem Problemkreis sind gerade in jüngster Zeit in der angloamerikanischen Literatur in einer Vielzahl von Einzelaufsätzen verschiedene Analysetechniken vorgeschlagen worden. In dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, die Ansätze zu systematisieren und einige MDS-Verfahren ausführlich darzustellen. Inwiefern sich die MDS-Verfahren dazu eignen, käuferorientierte Lösungsansätze für bestimmte Marketingprobleme zu liefern, soll durch einige ausgewählte Anwendungsbeispiele gezeigt werden.

---

1 TIETZ, B.: Grundlagen der Handelsforschung, Bd. 1: Die Methoden, Zürich 1969, S. 25-56.

2 NOELLE, E.: Umfragen in der Massengesellschaft; Einführung in die Methoden der Demoskopie, Hamburg 1963, S. 285.

In dem der Einführung folgenden z w e i t e n Kapitel werden Grundlagen der eindimensionalen Skalierung von Objekten beschrieben. Hier sollen insbesondere der Meßbegriff, die Bedeutung der unterschiedlichen Skalenniveaus und die Nützlichkeit der Skalierungsverfahren bei der Lösung von Marketingproblemen erläutert werden.

Im d r i t t e n Kapitel werden die Grundgedanken der mehrdimensionalen Skalierungen dargestellt. Zunächst werden die MDS-Verfahren in das umfangreiche Gebiet der multivariaten Analyse eingeordnet, und es wird überprüft, welche praktische Bedeutung die multivariaten Techniken besitzen. Daran anschließend erfolgt nach einer Charakterisierung der MDS ein systematischer Überblick über die verschiedenen Modelle.

Im v i e r t e n Kapitel werden die Beziehungen zwischen der Ähnlichkeit und der Distanz von Objektpaaren untersucht. Da davon ausgegangen wird, daß sich die Ähnlichkeit zweier Produkte funktional mit Hilfe des Abstandes zwischen zwei Punkten im Raum darstellen läßt, werden verschiedene Distanzfunktionen beschrieben.

Im f ü n f t e n Kapitel wird die sog. metrische mehrdimensionale Skalierung, die im wesentlichen auf faktoranalytischen Überlegungen beruht, dargestellt. Alle MDS-Verfahren benötigen als Ausgangsinformation zunächst Daten über den Abstand zwischen zwei Punkten. Die metrischen Techniken sind dadurch gekennzeichnet, daß sie metrische, d.h. intervall- oder verhältnisskalierte Distanzinformationen benötigen, um die Position der Punkte im Raum ermitteln zu können.

Im s e c h s t e n Kapitel wird ein iteratives Verfahren, nämlich die sog. nichtmetrische mehrdimensionale Skalierung erläutert. Sie kann dadurch charakterisiert werden, daß lediglich ordinale Distanzinformationen vorliegen.

Im s i e b t e n Kapitel werden sog. nichtaggregierende mehrdimensionale Skalierungsverfahren vorgestellt. Sie erlauben es, individuelle Beurteilungsunterschiede der Versuchspersonen sichtbar zu machen.

Im a c h t e n Kapitel werden einige Probleme, die bei der Anwendung der MDS-Verfahren entstehen, behandelt. Es werden Vorgehensweisen erläutert, mit deren Hilfe geeignete Objekte zur Skalierung ausgewählt werden können. Außerdem wird dargestellt, wie die benötigten Daten erhoben werden können und welche Möglichkeiten es gibt, die Dimensionen des Lösungsraumes zu interpretieren.

Im n e u n t e n Kapitel sind aus der Vielzahl potentieller und tatsächlicher Anwendungsmöglichkeiten der MDS-Verfahren im Marketing drei typische Anwendungsgebiete herausgegriffen worden. Es handelt sich dabei um exemplarische Darstellungen zur Imageanalyse, Produktpositionierung und zur Marktsegmentierung.

Im z e h n t e n Kapitel, das mit Schlußbemerkungen überschrieben ist, werden die Ergebnisse zusammengefaßt. Da die mehrdimensionalen Skalierungsprozeduren noch relativ wenig erforscht sind und eine Vielzahl offener Probleme bleiben wird, werden Hinweise für zukünftige Untersuchungen gegeben.

Im A n h a n g ist die mathematische Ableitung der Stressfunktion nach den Koordinatenwerten angeführt.

2 DIE EINDIMENSIONALE SKALIERUNG VON MERKMALEN

2.1 Grundlagen der eindimensionalen Skalierung

Häufig befassen sich wissenschaftliche Untersuchungen damit, beobachtbare Phänomene durch allgemeine quantitative Gesetzmäßigkeiten zu erklären. Versucht man das Konsumentenverhalten systematisch zu erfassen und zu beschreiben, bieten sich insbesondere die Skalierungsverfahren an. Es handelt sich dabei um Meßmethoden, die ursprünglich in der Psychologie entwickelt worden sind. Diese Verfahren ermöglichen es, Einstellungen, Wahrnehmungen und Verhaltensweisen von Personen in numerischer Form auszudrücken, d.h. zu messen. Dabei soll unter M e s s e n, in Anlehnung an CAMPBELL und STEVENS[1], die Zuordnung von Symbolen zu bestimmten Merkmalsausprägungen von Objekten verstanden werden. Das wesentliche Kennzeichen des Messens ist eine Zuordnung von Symbolen nach bestimmten Regeln. Dabei wird das Ziel verfolgt, die Merkmalsausprägungen der Objekte in numerischer Form wiederzugeben.
Es werden bestimmte Objekte (Stimuli, Items), deren Auswahl vom Untersuchungsziel abhängig ist, systematisch geordnet. Bei den Objekten kann es sich um Käufer, Produkte, Verpackungen, Werbeslogans usw. handeln. Die systematische Ordnung der Objekte erfolgt anhand ihrer Eigenschaften (Merkmale, Dimensionen). Wichtige Eigenschaften von Käufern sind u.a. Alter, Familienstand, Zahl der Kinder, Einkommen und Beruf. Die Eigenschaften werden bei den einzelnen Objekten in unterschiedlichen Merkmalsausprägungen (Merkmalswerten) auftreten. So ist z.B. ein Käufer 35 Jahre alt, verheiratet, hat

---

1 CAMPBELL, N.R.: An account to the principles of measurement and calculation, London 1938, S. 176, zitiert bei SCHEUCH, E.K.: Skalierungsverfahren in der Sozialforschung, in KÖNIG, R. (Hrsg.): Handbuch der empirischen Sozialforschung, Bd. 1, Stuttgart 1962, S. 348-384, hier S. 348.

zwei Kinder usw. Die Ermittlung der Merkmalsausprägungen ist in diesem Beispiel relativ einfach. Man steht aber häufig vor dem Problem, daß Objekteigenschaften nicht ohne weiteres meßbar sind. Will man z.B. die Kaufanreizwirkung verschiedener Produktverpackungen ermitteln, so müssen besondere Skalierungsverfahren angewandt werden. Sie ermöglichen es unter bestimmten Bedingungen, nicht direkt meßbare Merkmalsausprägungen der Objekte zu erkennen. Dazu muß zunächst eine Skala[1] definiert werden. Sie entsteht durch die bewußte Aufteilung (Normierung) einer Eigenschaft in Zahlen, Buchstaben oder Namen. Anschließend wird der Skalenwert der Objekte, d.h. die relative Lage der Objekte auf der Skala festgestellt, der dann die Merkmalsausprägung des Objekts wiedergibt. Eine derartige Vorgehensweise ermöglicht die Identifikation und Klassifikation von Objekten, die hinsichtlich einer oder mehrerer Eigenschaften geschehen kann. Erfolgt die Skalenwertbestimmung nur nach einem Merkmal, so spricht man von e i n d i m e n s i o n a l e r, sonst von m e h r d i m e n s i o n a l e r Skalierung.

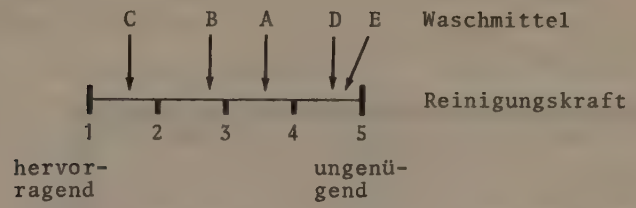
Die Grundgedanken der eindimensionalen Skalierung sollen an einem Beispiel verdeutlicht werden: Im Rahmen einer Analyse des Waschmittelmarktes sollen die Vorstellungen der Konsumenten hinsichtlich der vermeintlichen Reinigungskraft (Eigenschaft) verschiedener Waschmittel (Objekte) A, B, C, D und E untersucht werden. Angenommen, man habe sich für die Anwendung des Skalierungsverfahrens der gleicherscheinenden Intervalle[2] entschlossen, so wird einer solchen Anzahl von Versuchspersonen (Vpn), die einen repräsentativen Querschnitt der Bevölkerung darstellt, z.B. eine 5-Punkte-Skala vorgelegt,

---

1 Fälschlicherweise wird unter Skala teilweise "das Ergebnis eines standardisierten Meßvorganges" verstanden. So z.B. bei SCHEUCH, E.K.: Skalierungsverfahren in der Sozialforschung, a.a.O., S. 348.

2 SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, Weinheim 1967, S. 145 ff.

auf der die Objekte hinsichtlich der untersuchten Eigenschaft eingeordnet werden sollen. Jede Vp teilt also einem Waschmittel eine '1' für hervorragende, eine '2' für gute Waschkraft oder eine andere Note zu. Für jedes Waschmittel wird dann der feinberechnete Median sämtlicher Vp-urteile ermittelt, der bei diesem Verfahren den Skalenwert des Objektes darstellt.



Allgemein läßt sich ein derartiger Vorgang zur Messung bestimmter Merkmalsausprägungen von Objekten folgendermaßen darstellen[1]: Die Meß- oder Skalierungsverfahren versuchen ein empirisches System mit Hilfe eines formalen Systems abzubilden. Bei dem empirischen System handelt es sich um eine Menge P, die aus den einzelnen Objekten p_i (i = 1, 2, ..., n) besteht:

$$P = \{ p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_n \}$$

Das formale System, d.h. die Skala, besteht aus einer Menge B, deren Elemente die Zahlenwerte b_j (j = 1, 2, ..., m) sind:

$$B = \{ b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_m \}$$

Lassen sich nun an den Objekten von P Eigenschaften in unterschiedlichem Ausmaß feststellen, so kann jedem Objekt p_i

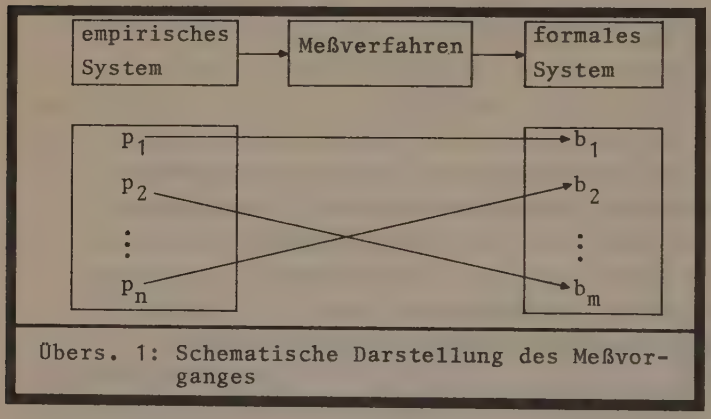
---

1 Vgl. COOMBS, C.H., RAIFFA, H. und THRALL, P.M.: Some views on mathematical models and measurement theory, in: Psychological Review, Vol. 61 (1954), S. 132-144, hier S. 136.

ein bestimmter Meßwert b_j zugeordnet werden. Das Meßverfahren, wie z.B. die Methode der gleicherscheinenden Intervalle, stellt also eine Zuordnungsfunktion zwischen p_i und b_j dar.

$$b_j = f\ (p_i)$$

Skalierungsverfahren sind also festgelegte Abbildungsvorschriften, die den Objekten bestimmte Skalenwerte hinsichtlich der untersuchten Eigenschaft zuordnen, d.h. sie beschreiben ein empirisches System mit Hilfe eines formalen Systems, wie Übersicht 1 nochmals verdeutlicht.



Übers. 1: Schematische Darstellung des Meßvorganges

Dabei soll zwischen den empirischen und den formalen Größen eine möglichst hohe Übereinstimmung bestehen. Diese Forderung wird als Isomorphiebedingung bezeichnet.

Man unterscheidet im wesentlichen vier Meßstufen oder S k a l e n a r t e n. Es handelt sich um zwei nichtmetrische Skalen, das sind die Nominal- und die Ordinalskala, und um zwei metrische Skalen, nämlich die Intervall- und die Verhältnisskala. Die einzelnen Skalenniveaus[1] lassen sich durch

1 Vgl. GUTJAHR, W.: Die Messung psychischer Eigenschaften, Berlin (Ost) 1972, S. 58 ff.; SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, a.a.O., S. 7 ff.

das Vorhandensein von Identitäts-, Ordnungs- und Additivitätseigenschaft, also durch mathematische Eigenschaften reeller Zahlen, kennzeichnen. Ein weiteres Unterscheidungsmerkmal sind die zulässigen Transformationen, die die Skalen erlauben. Darunter versteht man solche Umformungen, die den Informationsgehalt einer Skala nicht verändern.

Die N o m i n a l s k a l a stellt die niedrigste Meßstufe dar und beinhaltet die Zuordnung von Symbolen (Zahlen oder "Nomina") zu bestimmten Merkmalen von Klassen (z.B. O = Konsumgüter, 1 = Investitionsgüter oder P = Plastikprodukte, M = Metallprodukte, H = Holzprodukte usw.). Die Nominalskala besitzt die formale Eigenschaft der Identität, d.h. die Objekte innerhalb einer Klasse müssen homogen hinsichtlich der untersuchten Eigenschaft sein. Zulässige mathematische Operationen sind alle symmetrischen Transformationen. Es handelt sich dabei um eine Umordnung oder Neufestlegung der Symbole der einzelnen Objekte derart, daß gleiche Objekte wieder in gleichen Klassen sind.
Die O r d i n a l s k a l a ist eine Zuweisung von Zahlen zu bestimmten Objekteigenschaften, wobei sich zwischen den einzelnen Skalenwerten Ordnungsrelationen wie kleiner, größer oder gleich aufstellen lassen (z.B. Produkttestnoten: 1 = sehr gut, 2 = gut, 3 = befriedigend usw., Qualitätsgruppen u.ä.). Neben der Identitäts- wird hier also die Ordnungseigenschaft unterstellt. Informationserhaltend sind monotone Transformationen. Es handelt sich hierbei um Umformungen, die die Ordnung der Skalenwerte untereinander nicht verändern, d.h. die Beziehung zwischen den ursprünglichen und den transformierten Skalenwerten ist kontinuierlich wachsend oder fallend.
I n t e r v a l l - oder E i n h e i t s s k a l e n gehören zur Gruppe der metrischen Skalen, die nicht nur die Ordnungsrelationen der Objekte, sondern auch die Ordnung der Abstände zwischen den Objekten richtig wiedergeben. Intervallskalen

erlauben die Quantifizierung der Distanz zwischen den Skalenwerten. Sie haben zwei willkürliche Charakteristika, nämlich einen beliebigen Nullpunkt und eine frei wählbare Einheit (Temperaturmessungen in Grad Celsius oder Fahrenheiteinheiten). Additivität gilt hier nur im eingeschränkten Sinne für die Differenz zwischen zwei Skalenwerten. Informationserhaltend sind lineare Transformationen, d.h. eine Veränderung des Nullpunktes und der Einheit ist zulässig.
Die Skala mit dem größten Informationsgehalt ist die V e r h ä l t n i s s k a l a . Sie hat alle Eigenschaften reeller Zahlen und besitzt daher die Additivität in uneingeschränktem Maße. Bezeichnend ist ein festgelegter Nullpunkt (natürlicher Ursprung), der das völlige Fehlen der untersuchten Objekteigenschaft anzeigt (z.B. Packungsinhalt in Gramm,Werbeausgaben in DM usw.). Zulässige Umwandlungen sind nur in Form von Proportional- oder Ähnlichkeitstransformationen möglich. Da hier der Nullpunkt einen empirischen Sinn hat, ist die Nullpunktverschiebung unzulässig. Lediglich eine proportionale Veränderung der Meßeinheit ist möglich.

Aus den zulässigen Transformationen ergibt sich ein streng hierarchischer Zusammenhang für diese vier Skalenniveaus. Für die einzelnen Meßstufen sind unterschiedliche mathematische Operationen zulässig. Das bedeutet aber auch, daß bei der Analyse von Daten mit unterschiedlichem Skalenniveau unterschiedliche mathematische Verfahren anzuwenden sind.

2.2 Die Nützlichkeit des Skalierens im Marketing

Rein verbale Beschreibungen zur Lösung von Marketingproblemen sind häufig zu ungenau und wenig operational.
Die Unklarheiten resultieren aus der mangelnden Eindeutigkeit der Sprache. Daher empfiehlt sich eine verbale und numerische Beschreibung des komplizierten Marktgeschehens. Dies

erfordert die Entwicklung operationaler Meßtechniken[1]. Zweifellos kann eine endgültige Beurteilung über den Wert und die Anwendungsmöglichkeiten der Skalierungstechniken erst durch den Beweis ihrer Leistungsfähigkeit erbracht werden, trotzdem sollte die N ü t z l i c h k e i t d e s S k a l i e r e n s im Marketingbereich einer Unternehmung zunächst durch eine Abwägung der negativen und positiven Aspekte allgemein erörtert werden.

Es sind mehrere E i n w ä n d e gegen die Skalierung[2] denkbar. So wird häufig angeführt, daß psychische Vorgänge andersartig seien als mathematische Operationen. Sie seien nicht vergleichbar, da das Verhalten der Menschen unter sonst gleichen Bedingungen wegen ihrer Willensfreiheit indeterminiert sei. Meßbar sei nur das, was quantitativen Charakter habe, das 'Seelische' sei aber qualitativ. Als weiterer Einwand gegen die Analyse des Kundenverhaltens mit Hilfe psychologischer Meßtechniken wird vorgebracht, daß jeder Konsument durch einen vielschichtigen psychischen Vorgang bei seinem Handeln gekennzeichnet sei. Jede Handlung sei auf Grund ihrer Komplexität nicht faßbar. Allerdings trifft dieser Einwand nur bedingt zu, denn die Nichterfaßbarkeit der komplexen Sachverhalte ist kein Argument gegen das Skalieren an sich, sondern lediglich ein Hinweis auf bestimmte methodische Schwächen der bisher existierenden Skalierungstechniken. Es konnten nämlich durch verfeinerte Verfahren und insbesondere durch die mehrdimensionale Skalierung immer bessere Ergebnisse bei der Beschreibung des menschlichen Tuns erzielt werden. Die bisher vorgebrachten Argumente gegen das Skalieren erweisen sich - bis auf den Hinweis auf die Methodenschwäche -

---

1 GREEN, P.E.: Measurement and data analysis, in: Journal of Marketing, Vol. 34, No. 1 (1970), S. 15-17; TIETZ, B.: Grundlagen der Handelsforschung, a.a.O., S. 205.

2 Vgl. GUTJAHR, W.: Die Messung psychischer Eigenschaften, a.a.O., S. 33 ff.; SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, a.a.O., S. 19 ff.

als nicht stichhaltig[1]. Von größerer Bedeutung ist allerdings das Problem der Datenerhebung. Insbesondere dann, wenn repräsentative Aussagen gemacht werden sollen, sind Marktanalysen mit Skalierungen mit einem erheblichen Aufwand verbunden. Dabei ist es dringend erforderlich, zwischen Informationsaufwand und Informationsnutzen abzuwägen. Daher kann nur in Verbindung mit einer konkreten Problemstellung eine Entscheidung für oder gegen den Einsatz von Skalierungstechniken getroffen werden.

Trotz der obengenannten Schwierigkeiten ist eine positive Beurteilung der Skalierungsverfahren gerechtfertigt, weil sie folgende V o r z ü g e [2] besitzen: Sie erlauben eine exakte Beschreibung von empirischen Phänomenen, die Zusammenfassung von Ergebnissen, die Anwendung mathematischer Operationen, die Aufstellung von quantitativen Modellen und nicht zuletzt die Ableitung von Gesetzmäßigkeiten. Dabei gewinnen die Skalierungsverfahren insbesondere deshalb immer mehr an Bedeutung, weil sie die Verarbeitung komplexer Sachverhalte mittels elektronischer Datenverarbeitungsanlagen ermöglichen. Dadurch werden umfassende Marktinformationen beschafft, die die Planung des Absatzbereiches einer Unternehmung erleichtern. Der Einsatz von Skalen erlaubt durch die Standardisierung von Objekteigenschaften vergleichende Analysen, die bei rein verbaler Beschreibung nicht oder nur bedingt möglich sind. Dabei ergeben sich insbesondere daraus Analyseerleichterungen, daß umfangreiche Aussagen über ein Objekt ohne dessen physische Anwesenheit gemacht werden können.

Wegen dieser bemerkenswerten Vorzüge werden Skalierungstechniken von Wissenschaftlern und Praktikern allgemein anerkannt.

---

1 Vgl. GUTJAHR, W.: Die Messung psychischer Eigenschaften, a.a.O., S. 39.

2 Vgl. TORGERSON, W.S.: Theory and Methods of Scaling, New York, London und Sydney 1958, S. 9 f.

So arbeiten die meisten Werbeagenturen und Marktforschungsinstitute bei der Beschreibung des Konsumentenverhaltens mit Skalierungen. Bisher wurden meist nur eindimensionale Verfahren angewandt. Erst in jüngster Zeit kommen mehrdimensionale Skalierungsverfahren, deren Grundlagen im nächsten Kapitel behandelt werden, zum Einsatz.

3 GRUNDGEDANKEN DER MEHRDIMENSIONALEN SKALIERUNG (MDS)

3.1 Einordnung der MDS in die multivariate Analyse und Überprüfung der empirischen Relevanz multivariater Analysetechniken

Die Verfahren der mehrdimensionalen Skalierung sind ein Teilgebiet der umfangreichen Multivariatenanalyse[1]. Hier soll eine Übersicht über diese Verfahren gegeben und anschließend ihre empirische Relevanz - unter besonderer Berücksichtigung der mehrdimensionalen Skalierung - überprüft werden.

Der durch die gewaltigen Fortschritte der Computertechnologie festzustellende Trend zu quantitativen Marketingtechniken hat zu einer 'multivariaten Revolution' in der Marktforschung[2] geführt. Einige Verfahren der Multivariatenanalyse (MA), besonders auch die mehrdimensionale Skalierung, gehören zum festen Bestandteil der modernen Marketingliteratur und -praxis. Grob umschrieben kann man diejenigen statistischen Lösungsmöglichkeiten, die Beziehungen zwischen einer Menge von Variablen beschreiben und messen, als m u l t i v a r i a t e Verfahren bezeichnen. Abstrakter formuliert bedeutet dies: Jede simultane Analyse von mehr als zwei Variablen ist ein Teil der MA[3]. Es handelt sich in der Regel

---

1 BREITUNG, A.: Einsatz multivariater statistischer Verfahren in Marketing-Informationssystemen, in: MEFFERT, H.: Marketing heute und morgen, Wiesbaden 1975, S. 127-151; o.V.: Zur Einführung in die multivariate Datenanalyse, Infratest Forschungsservice, München 1974; DICHTL, E.: Die Multivariatenanalyse im Dienste der Verhaltensforschung, a.a.O., S. 74-107.

2 SHETH, J.N.: The multivariate revolution in marketing research, in: Journal of Marketing, Vol. 35 (Jan. 1971), S. 13-19.

3 SHETH, J.N.: The multivariate revolution in marketing research, a.a.O., S. 14; SHETH, J.N.: Multivariate Analysis in marketing, in: Journal of Advertising Research, Vol. 10, No 1 (Febr. 1970), S. 29-38, hier S. 30.

also um multiple Messungen über eine größere Anzahl von Versuchspersonen. Der multivariate Charakter liegt jedoch in der Vielzahl der Variablen und nicht in der Vielzahl der Versuchspersonen[1].

Es ist empfehlenswert, die Gesamtheit der MA-Verfahren in zwei große Teilgebiete zu gliedern, nämlich in die Dependenz- und Interdependenzanalyse[2].
Die D e p e n d e n z a n a l y s e erklärt die abhängige Variable durch die verbleibenden sog. unabhängigen oder erklärenden Variablen. Im wesentlichen rechnet man die multiple Regressions-, die Diskriminanz-, die Varianzanalyse und die kanonische Analyse dazu. Demgegenüber werden bei der I n t e r d e p e n d e n z - analyse nicht die Variablen durch die anderen bestimmt oder erklärt, sondern das Hauptproblem dieser Techniken ist die Reduktion der Variablenzahl auf aussagekräftigere Komponenten bzw. die Auffindung von Subvariablen. Man unterscheidet die Faktoren-, latente Strukturen-, die Clusteranalyse und die mehrdimensionale Skalierung. Übersicht 2 verdeutlicht diese Gliederung der MA-Verfahren. Versucht man die MDS-Verfahren von den übrigen MA-Techniken abzugrenzen, so gibt es zwei Möglichkeiten:

a) Im Normalfall wird bei der MA von einer Vielzahl von Variablen ausgegangen. Bei der MDS hingegen ist eine komplexe Variable - die Ähnlichkeit - Ausgangspunkt.

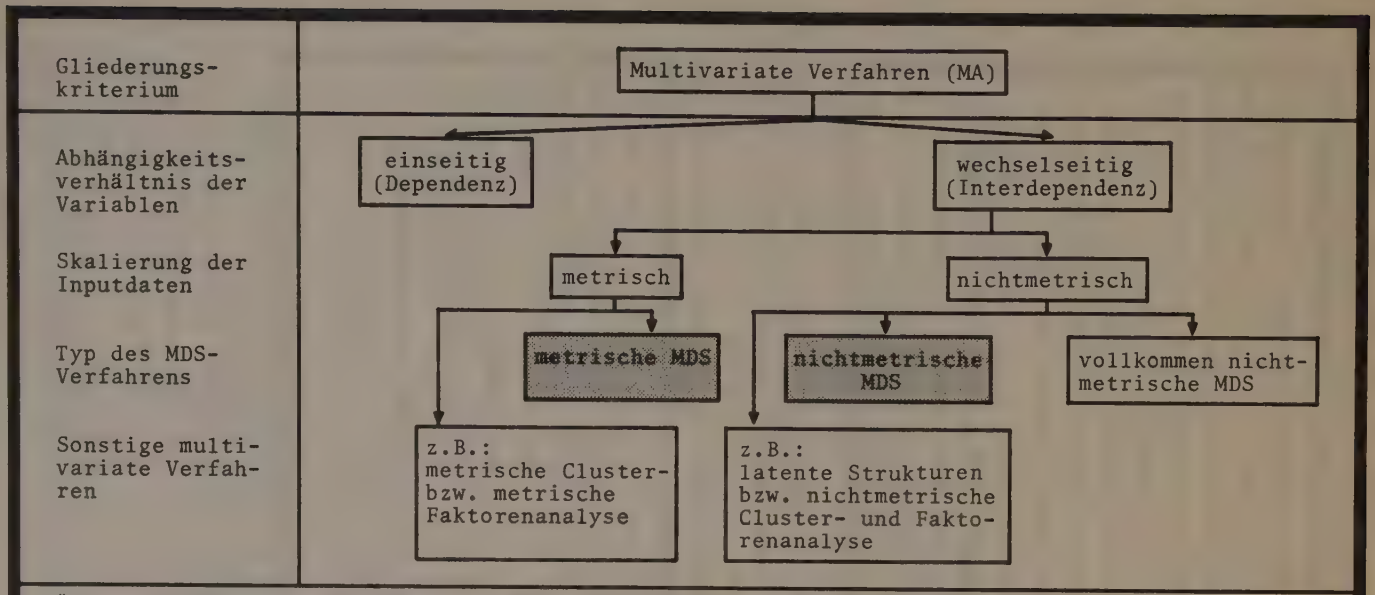
b) Die MDS dient der Gewinnung von Meßdaten. Die anderen multivariaten Methoden dienen der Analyse von Meßdaten[3].

---

1 GATTY, R.: Multivariate analysis for marketing research: An evaluation, in: Applied Statistics, Vol. XV (1966), S. 157-172, hier S. 158.

2 Vgl. AAKER, D.A.: Multivariate analysis in marketing; theory and application, Belmont 1971.

3 AHRENS, H.J.: Multidimensionale Skalierung. Weinheim, Basel 1974, S. 34.



Übers. 2: Einordnung der mehrdimensionalen Skalierung (MDS) in die multivariate Analyse

Quelle: Vgl. KINNEAR, T.C. und TAYLOR, J.C.: Multivariate methods in marketing research: A further attempt at classification, in: JoM, Vol. 34 (Oct. 1971),S. 56-59, hier S.57

Die Anzahl der Anwender multivariater Analysetechniken in der Bundesrepublik Deutschland ist relativ gering. Nach Auskunft mehrerer Marktforschungsinstitute liegt diese Zahl weit unter 50. Da einzelne Unternehmen kaum in der Lage sind, dieses komplizierte Instrumentarium selbständig zu benutzen, wenden sie sich meist an führende Werbeagenturen bzw. Marktforschungsinstitute.
Inwieweit multivariate Analysetechniken und insbesondere die mehrdimensionale Skalierung bei deutschen Werbeagenturen angewandt werden, wurde im ersten Quartal des Jahres 1975 vom Verfasser durch eine schriftliche Umfrage untersucht. Da davon ausgegangen wurde, daß nur solche Unternehmen potentielle Anwender der MA-Prozeduren sein können, deren Umsatzgröße eine betriebsinterne oder -externe Datenverarbeitung vermuten läßt, wurden die 30 umsatzstärksten deutschen Werbeagenturen (Stand 31.12.1974)[1] in die Befragung einbezogen. Von den 30 abgeschickten Fragebögen wurden 18 zurückerhalten. Davon hatten 16 Agenturen die Fragen vollständig beantwortet. Die verwertbare Antwortquote lag somit bei 53,3 %, was durchaus zufriedenstellend ist. Dieses gute Ergebnis ist insofern positiv zu bewerten, da im Fragebogen teilweise betriebsinterne Informationen verlangt wurden. So ist aus früheren Untersuchungen bekannt, daß Werbeagenturen Ergebnisse und Erfahrungen mit bestimmten Methoden als Betriebsgeheimnis ansehen. Es ist daher nicht verwunderlich, daß die Mehrzahl eine vertrauliche Behandlung der Antworten wünschten. Wie aus Übersicht 3 deutlich wird, nimmt die Antwortquote mit sinkendem Umsatz ab.

---

1 o.V.: Top Fifty - die 50 umsatzstärksten deutschen Werbeagenturen, in: Der Kontakter, märkte & medien verlagsgesellschaft mbH Hamburg, Vol. XV/5, Febr. 1975, S. 1 ff., mit Beiblatt: TOP FIFTY-Liste.

Rangplatz d.Agentur (Umsatz)	Anzahl der vollständig ausgefüllten Fragebögen
1. - 10.	7
11. - 20.	5
21. - 30.	2
Herkunft unbekannt [1]	2

Übers. 3 : Anzahl der ausgefüllten Fragebögen in der Stichprobe, gegliedert nach den einzelnen Dritteln der 30 größten deutschen Werbeagenturen

Übersicht 4 gibt die Anzahl der Anwender ausgewählter multivariater Verfahren in der Stichprobe wieder.

Multivariates Verfahren	Anzahl der Anwender
1. Faktorenanalyse	12
2. MDS	11
3. Diskriminanzanalyse	10
4. Clusteranalyse	9
5. Multiple Regression	8
6. Sonstige	2

Übers. 4 : Die Anzahl der Anwender ausgewählter multivariater Verfahren in der Stichprobe

Von den 11 Anwendern der MDS hatte nur einer das Verfahren vor 1970 eingeführt, während 10 erst seit 1970 oder später damit arbeiten. Interessant ist es, daß keine der Werbe-

1 Da zwei Unternehmen anonym antworteten, konnten ihre Fragebögen nicht einem bestimmten Drittel zugeordnet werden.

agenturen angab, das MDS-Verfahren wieder abschaffen zu wollen. Dagegen will eine Werbeagentur, welche die MDS noch nicht in ihrem Methodenprogramm führte, sie in den kommenden ein bis zwei Jahren einführen. Über die zukünftige Entwicklung urteilten 16 Agenturen wie folgt:

9 mit: 'wird verstärkt angewandt werden',
5 mit: 'eine breite Anwendung wird kaum erwartet',
2 mit: 'wird sich nicht durchsetzen'.

Es ist bemerkenswert, daß die beiden, die dem Verfahren keine Chance gaben, Nichtanwender waren.
Außerdem sollte untersucht werden, für welche Problemstellungen des Marketing die MDS-Verfahren vorrangig eingesetzt werden. Über die A n w e n d u n g s b e r e i c h e der MDS-Techniken gibt Übersicht 5 Aufschluß.

Anwendungsbereich	Anzahl der MDS-Anwender
Marktsegmentierung	11
Marken- und Firmenimage	8
Werbewirkung	6
Erforschung der öffentlichen Meinung	4
Produktinnovation	3
Kaufverhalten	3
Markenwechsel	2
Produktlebenszyklus	1
Sonstige	3

Übers. 5: Die Anwendungsbereiche der MDS-Verfahren im Marketing, gegliedert nach der Häufigkeit der Nennungen durch MDS-Anwender in der Stichprobe[1]

1 Es waren Mehrfachnennungen möglich.

Bei der Datenverarbeitung zeigte sich häufig eine kombinierte Verwendung von Eigenprogrammen und Standardprogrammen. Drei von 11 MDS-Anwendern hatten hauseigene Programme entwickelt. Die restlichen benutzten insbesondere die Programme TORSCA 8[1], MDSCAL[2], PREFMAP[3] und andere. Außerdem erwies sich eine Zusammenarbeit mit anderen Firmen als angemessen. So arbeiteten 9 von 11 MDS-Anwendern bei der Datenverarbeitung und beim Entwurf für den Gang der Untersuchung mit externen Dienstleistungsunternehmen zusammen. Hierbei wurden in der Reihenfolge der Häufigkeit genannt: Marktforschungsinstitute, EDV-Hersteller, Software-Anbieter und in einem Fall eine Universität. Die MDS-Techniken setzen also in der Regel eine kooperative Arbeit voraus.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß multivariate Verfahren auch in Deutschland für Marketingfragestellungen eingesetzt werden. Die Nützlichkeit insbesondere mehrdimensionaler Skalierungen wird bejaht, was sich auch in der verstärkten Anwendung bei westdeutschen Werbeagenturen zeigt. Die Ergebnisse dieser Untersuchung geben auf Grund der Größe und der Struktur der Stichprobe nur einen Einblick in die praktische Anwendung mehrdimensionaler Skalierungen bei deutschen Werbeagenturen. Eine telefonische Umfrage bei den führenden Marktforschungsinstituten Deutschlands bestätigte jedoch folgende in der Befragung aufgedeckte Tendenzen:

- Die MDS-Verfahren werden sowohl bei Werbeagenturen als auch bei Marktforschungsinstituten in den letzten fünf Jahren zunehmend eingesetzt.
- Die Beurteilung der MDS-Techniken ist meist positiv.
- Diese Verfahren kommen häufig bei Fragestellungen der Marktsegmentierung, der Imageanalyse, der Produktpositionierung und der Produktinnovation zum Einsatz.
- Während bei Werbeagenturen vorrangig Standardprogramme benutzt werden, verwenden die Marktforschungsinstitute zunehmend Eigenprogramme.

---

1 GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, a.a.O., S. 192 ff.

2 Ebenda, S. 188 f.

3 Ebenda, S. 214 f.

3.2 Die Notwendigkeit mehrdimensionaler Skalierungen

Die mehrdimensionale Skalierung (MDS) ist eine Technik, welche simultan die Skalenwerte mehrerer Objekte bezüglich verschiedener Dimensionen berechnet. Die Position der Objekte in dem durch die Dimensionen gebildeten Wahrnehmungsraum wird mit Hilfe der Abstände zwischen den Objekten bestimmt. Dabei bestehen zwei meist konkurrierende Zielsetzungen: Einerseits soll die Punktekonfiguration möglichst exakt die Objektbeziehungen wiedergeben, und andererseits soll die Dimensionalität des Raumes minimiert werden.

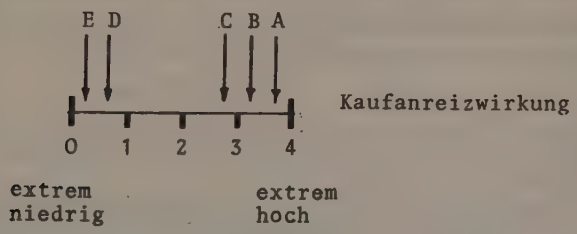
Wie bereits dargestellt wurde, ist die Nützlichkeit von Skalierungen im Marketing allgemein zu bejahen, es bleibt aber noch zu klären, warum vor allem die mehrdimensionalen Skalierungstechniken bei der Analyse des Marktgeschehens besonders vorteilhaft sind. Die Notwendigkeit der MDS-Verfahren erklärt sich anschaulich aus den Grenzen eindimensionaler Skalierungen. Traditionelle eindimensionale Ansätze verstehen unter Skalierung einen Meßvorgang zur Quantifizierung der Ausprägung einer Eigenschaft für mehrere Objekte. Werden solche Verfahren bei Marktanalysen angewandt, so wird unterstellt, daß die relevanten Eigenschaften (Kaufkriterien oder -dimensionen) hinsichtlich Art und Umfang bekannt sind. Es bleibt allerdings fraglich, ob diese Voraussetzung bei den vielschichtigen Marktphänomenen unterstellt werden kann. Ist diese Prämisse nicht erfüllt, dann liefern solche Methoden Artefakte[1]. In der psychologischen Skalierung - insbesondere bei der Analyse des Kaufverhaltens - muß häufig davon ausgegangen werden, daß Quantität und Qualität der Beurteilungsfaktoren a priori

---

1 SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, a.a.O., S. 271.

nicht bekannt sind und ihr Erkennen geradezu Ziel der Untersuchung ist. Dieser Gedanke wird von den Verfechtern eindimensionaler Techniken durchaus anerkannt. Häufig wird dem entgegnet, daß mehrere Beurteilungskriterien des Versuchspersonenurteils sich in eine übergeordnete Dimension überführen lassen. Dieser der Nutzentheorie entlehnte Gedanke hat zweifellos seine Berechtigung, reicht aber für eine detaillierte Analyse meist nicht aus.

Zur Verdeutlichung dieser Gedankengänge diene ein hypothetisches Beispiel: Die Marketingabteilung eines Unternehmens der Automobilindustrie analysiert den Kleinwagenmarkt. Es soll untersucht werden, welches Modell eines neu einzuführenden PKWs (A, B, C, D oder E) die besten Absatzchancen besitzt. Einer repräsentativen Zahl von Kleinwagenfahrern wird die Frage vorgelegt: "Wenn Sie sich jetzt einen neuen Wagen kaufen würden, welchen würden Sie sich anschaffen? Wäre dieser Wagen aus irgendwelchen Gründen nicht lieferbar, welchen würden Sie dann wählen?" usw. Jede befragte Person wird also gebeten, eine Rangordnung der Kaufanreizwirkung für die fünf PKWs aufzustellen. Aus diesen Rangziffern läßt sich dann unter bestimmten Voraussetzungen eine Intervallskala bilden[1]. Angenommen, es habe sich folgende eindimensionale Skala ergeben:



1 SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, a.a.O., S. 170 ff.

Diese Skala zeigt zwar an, d a ß Kleinwagen A die besten Absatzchancen hat; es wird aber nicht erklärt, w a r u m er am begehrtesten ist. Insbesondere kann nicht erkannt werden, inwieweit Prestige, Komfort, Wirtschaftlichkeit und andere Beurteilungsdimensionen den Wagen A in den Augen der Verbraucher zum Favoriten machen.
Die Ermittlung derjenigen Subkriterien, die in das Verbraucherurteil einfließen, ist der grundsätzliche Ansatzpunkt der mehrdimensionalen Skalierung. Das Erkennen derartiger Objekteigenschaften ergibt für die MDS eine Sonderstellung, weil verhindert wird, daß "Ergebnisse durch Vorgabe der Beurteilungsdimensionen vorweggenommen"[1] werden. Durch die a posteriori Extraktion relevanter Beurteilungskriterien wird die latente Ordnung der Objekte, die mit bloßem Auge nicht zu erkennen ist, transparenter gemacht. Es ist daher nicht verwunderlich, daß Marketingprobleme zunehmend mit MDS-Verfahren analysiert werden[2] und im Rahmen des quantitativen Marketings "ein aktueller Forschungsschwerpunkt"[3] waren und heute noch sind.

3.3 Die Grundlagen der MDS-Verfahren

Die mehrdimensionalen Skalierungstechniken werden bei Marketingfragestellungen hauptsächlich eingesetzt, um die Beurteilungsdimensionen abzuleiten, nach denen die Konsumenten die Produkte kategorisieren, und um zu klären, wie diese Komponenten das Kundenverhalten beeinflussen.

---

1 DICHTL, E.: Die Multivariatenanalyse im Dienste der Verhaltensforschung, in: HANSEN, H.R. (Hrsg.): Computergestützte Marketingplanung, München 1974, S. 74-107.

2 NEIDELL, L.A.: The use of nonmetric multidimensional scaling in marketing analysis, in: AAKER, D.A. (Hrsg.): Multivariate analysis in Marketing; theory and application, Belmont 1971, S. 270-282.

3 KRAUTTER, J.: Zum gegenwärtigen Stand der Entwicklung quantitativer Marketing-Modelle, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Nr. 10, 43. Jahrgang (1973), S. 723-746, hier S. 742.

Wenn die Versuchspersonen, z.B. Konsumenten, bei der Beurteilung der Objekte, z.B. Produkte, mehr als ein Merkmal berücksichtigen, können die Objekte nicht auf einem eindimensionalen Kontinuum, sondern nur als Punkte in einem mehrdimensionalen R a u m dargestellt werden. Die A c h s e n dieses Raumes, der als W a h r n e h m u n g s r a u m bezeichnet wird, sollen dabei den relevanten Beurteilungsdimensionen entsprechen. Die K o o r d i n a t e n w e r t e der einzelnen Punkte stellen die Skalenwerte der Objekte bezüglich der verschiedenen Beurteilungsdimensionen dar. Dabei ist die D i s t a n z [1] (Nähe, Abstand) zweier Punkte im Wahrnehmungsraum ein Maß für die Ähnlichkeit eines Objektpaares. Je näher zwei Punkte im Raum zusammenliegen, d.h. je geringer die Distanz ist, desto größer ist die Ähnlichkeit zwischen diesen Objekten. Angenommen, bei der Beurteilung verschiedener Automodelle (A, B, C, D und E) wird der Wahrnehmungsraum durch die Dimensionen Wirtschaftlichkeit und Komfort gebildet, so können die verschiedenen PKWs u.U. so im Wahrnehmungsraum positioniert sein, wie es in Abb. 1 dargestellt wird.

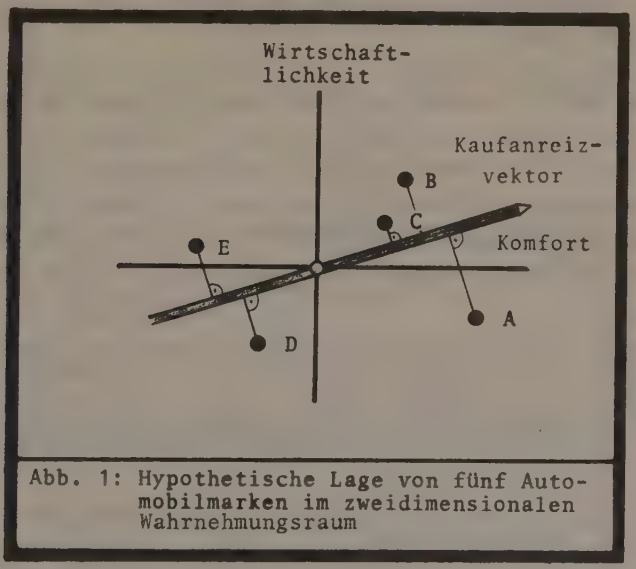


Abb. 1: Hypothetische Lage von fünf Automobilmarken im zweidimensionalen Wahrnehmungsraum

1 Vgl. Kapitel 4 dieser Arbeit.

Die Position dieser als Punkte im Raum abgebildeten Automobile wird mit Hilfe der mehrdimensionalen Skalierung festgelegt. Wenn es gelingt, in diese Punktekonfiguration einen Ursprungsfahrstrahl so zu legen, daß die Projektionen der Punkte auf diesen Vektor den Kaufanreiz der einzelnen Kleinwagen anzeigen, dann sind wesentlich bessere Informationen verfügbar, als dies bei rein eindimensionaler Darstellung der Kaufanreizwirkung möglich gewesen wäre. So könnten z.B. die Absatzchancen des Kleinwagens B durch eine relativ geringe Komfortverbesserung wesentlich erhöht werden. Diese Erkenntnis hätte mit einem traditionellen eindimensionalen Ansatz kaum gewonnen werden können.

Auch bei den MDS-Verfahren sind also die Grundgedanken, die allen Skalierungsverfahren gemein sind, wiederzufinden: Ausgangspunkt ist eine Menge von n Objekten (empirisches System), die als Punktekonfiguration (formales System) abgebildet wird. Die Konfiguration der den n Objekten zugeordneten n Punkte soll eine möglichst 'gute' Abbildung der mittels der Vpn-urteile gefundenen Objektrelationen sein (Isomorphiebedingung).

Verfolgt man die historischen Entwicklungen der mehrdimensionalen Skalierung in der Literatur, so wurde Pionierarbeit von RICHARDSON[1] im Jahre 1938 geleistet. Mehrdimensionale Rangordnungen wurden von KLINGBERG[2] untersucht. Weitere Vorschläge bezogen sich auf spezielle Ähnlichkeits- bzw. Distanzmodelle. Hier sei das 'City-Block-Modell' von ATTNEAVE[3] und das modi-

---

1 RICHARDSON, M.W.: Multidimensional psychophysics, in: Psychological Bulletin, Vol. 35 (1938), S. 659-660.

2 KLINGBERG, F.L.: Studies in measurement of the relation between souvereign states, in: Psychometrika, Vol. 6, (1941), S. 335-352, zit. bei SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, a.a.O. S. 319.

3 ATTNEAVE, F.: Dimensions of similarity, in: American Journal of Psychology, Vol. 63 (1950), S. 516-556.

fizierte euklidische Distanzmodell von CARROLL und CHANG[1] besonders hervorgehoben. COOMBS[2] formulierte ein sog. Unfolding-Modell, welches von BENNETT und HAYS[3] weiterentwickelt wurde, aber kaum praktische Bedeutung erlangte. TORGERSON[4] entwickelte einen Algorithmus zur sog. metrischen mehrdimensionalen Skalierung.
Vorrangige Bedeutung im Marketing haben die von SHEPARD[5] und KRUSKAL[6] entwickelten sog. nichtmetrischen Verfahren. Sie sind bereits gut formalisiert. Diese computergestützten

---

1 CARROLL, J.D. und CHANG, J.J.: A general index of nonlinear correlation and its application to the interpretation of multidimensional scaling solutions, in: American Psychologist, Vol. 19 (1964) S. 540; CARROLL, J.D.: Individual differences and multidimensional scaling, in: SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B. (Hrsg.): Multidimensional scaling, Vol. I Theory, a.a.O., S. 105-155.

2 COOMBS, C.H.: A theory of data, New York 1964, S. 140-180; COOMBS, C.H.: Psychological scaling without a unit of measurement, in: Psychological Review, Vol. 57 (1950), S. 145-158.

3 BENNET, J.F. und HAYS, W.L.: Multidimensional unfolding: Determing the dimensionality of ranked preference data, in: Psychometrika, Vol. 25 (1960), S. 27-43.

4 TORGERSON, W.S.: Theory and methods of scaling, New York, London, Sidney 1958, S. 247 ff.

5 SHEPARD, R.N.: The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function, I, in: Psychometrika, Vol. 27 (1962),S. 125-140; SHEPARD,R.N.: The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function, II, in: Psychometrika, Vol. 27 (1962), S. 219-246.

6 KRUSKAL, J.B.: Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis, in: Psychometrika, Vol. 29 (1964), S. 1-28; KRUSKAL, J.B.: Nonmetric multidimensional scaling : A numerical method, in: Psychometrika, Vol. 29, No. 2 (June 1964), S. 115-129.

Algorithmen verhalfen den mehrdimensionalen Skalierungsverfahren zum eigentlichen Durchbruch und wurden Ende der 60er Jahre von wissenschaftlichen Marketingspezialisten wie z.B. GREEN und CARMONE[1] in den USA aufgegriffen und teilweise empirisch angewandt. Deutschsprachige Arbeiten[2] liegen erst seit 1973 vor.

Wie diese Literaturübersicht andeutet, gibt es eine Vielzahl verschiedener Ansätze zur mehrdimensionalen Skalierung von Objekten, so daß eine Systematisierung zweckmäßig ist. Es empfiehlt sich, die Gesamtheit der MDS-Ansätze nach drei Gliederungskriterien zu unterteilen:

a) Nach dem S k a l e n n i v e a u der Ausgangsdaten und des Ergebnisses der Skalierung ergeben sich die metrische, die nichtmetrische und die vollkommen nichtmetrische mehrdimensionale Skalierung[3].

b) Nach dem I n h a l t der Ausgangsdaten unterscheidet man zwischen der mehrdimensionalen Skalierung von Ähnlichkeits- und Präferenzdaten.

c) Nach der Art der Z u s a m m e n f a s s u n g der Ausgangsdaten unterteilen sich die MDS-Verfahren in aggregierende (aggregate scaling) und nichtaggregierende (individual scaling) Methoden.

Diese drei Gliederungskriterien sind nicht überschneidungsfrei. Kombinationsmöglichkeiten wie z.B. 'metrische nicht-

---

1 GREEN, P.E. und RAO, V.: Applied multidimensional scaling, Winston 1972; GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, Boston 1970.

2 AHRENS, H.J.: Multidimensionale Skalierung, Weinheim, Basel 1974; DICHTL, E.: Die Multivariatenanalyse im Dienste der Verhaltensforschung, a.a.O., S. 74-107; DILLER, H. und SCHOBERT, R.: Räumliche Repräsentation durch nichtmetrische mehrdimensionale Skalierung, in: Jahrbuch der Absatz- und Verbrauchsforschung, Heft 4, 19. JG., (1973), S. 297-310; HOLTMANN, D.: Multidimensionale Skalierung, Methode und ihre Anwendung in den Sozialwissenschaften, Diss., Köln 1974; SCHOBERT, R.: Die mehrdimensionale Skalierung als Instrument der Absatzforschung, in: Arbeitspapiere des Betriebswirtschaftlichen Instituts der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, Heft 27, Febr. 1975.

3 Vgl. GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling: An introduction and comparison of nonmetric unfolding techniques, in: JoM, Vol VI (Aug.1969), S. 330-341.

aggregierende mehrdimensionale Skalierung von Ähnlichkeitsdaten' u.a. werden in der Literatur erörtert und teilweise schon angewandt. In den folgenden Abschnitten sollen die Unterschiede zwischen den Ansätzen näher erläutert werden.

3.4 Unterscheidung der MDS-Verfahren nach dem Skalenniveau der Ausgangsdaten

Als Ausgangsdaten der mehrdimensionalen Skalierung dienen die Abstände zwischen Objektpaaren. Abhängig vom Skalenniveau der Entfernungen unterscheidet man die metrische, die nichtmetrische und die vollkommen nichtmetrische mehrdimensionale Skalierung.

Ausgangspunkt (Input) der m e t r i s c h e n mehrdimensionalen Skalierung sind metrische Distanzangaben. Gelingt es, z.B. für fünf Objekte[1] (A, B, C, D und E) die Distanzen auf verhältnisskaliertem Niveau zu erheben, so läßt sich eine Distanzmatrix aufstellen, deren Elemente den metrischen Abstand für jedes Objektpaar angeben.

	A	B	C	D	E
A	-	2,9	2,5	4,1	5,4
B		-	0,9	4,2	4,0
C			-	3,3	3,7
D				-	2,2
E					-

Als Ergebnis (Output) erhält man die Lage der Punkte im Raum. In dem PKW-Beispiel besteht die metrische MDS aus der Konstruktion einer Konfiguration im verhältnisskalierten Raum[2], wie sie in Abb.1 dargestellt ist.

---

1 Vgl. PKW-Beispiel in Abschnitt 3.3 dieser Arbeit.

2 Vgl. Abschnitt 4.1 dieser Arbeit.

Liegen aber nur ordinale Distanzinformationen für die Punktpaare vor, so ist der Input n i c h t m e t r i s c h . Dem kleinsten Abstand wird eine '1', dem zweitkleinsten eine '2' usw. zugeordnet, und man erhält eine Distanzmatrix, deren Elemente Rangziffern der Abstände sind. So ergibt sich für das PKW-Beispiel folgender Input:

	A	B	C	D	E
A	-	4	3	8	10
B		-	1	9	7
C			-	5	6
D				-	2
E					-

Es lassen sich nun mit Hilfe der nichtmetrischen mehrdimensionalen Skalierung Punktepositionen im verhältnisskalierten, d.h. metrischen Raum ableiten. Die Abstände zwischen den einzelnen Punktepaaren (Interpunktdistanzen) der reproduzierten Konfiguration weisen die gleiche Ordnungsstruktur auf, die in der Inputmatrix vorgegeben war[1].

Die v o l l k o m m e n n i c h t m e t r i s c h e mehrdimensionale Skalierung geht ebenfalls von ordinalen Ausgangsdaten aus. Diese Verfahren liefern als Output aber

---

1 Die Leistungsfähigkeit eines analytischen Verfahrens läßt sich dann besonders anschaulich darstellen, wenn die zu ermittelnde Lösung bereits bekannt ist. Für die nichtmetrische MDS ist das sog. 'Landkartenbeispiel' besonders eindrucksvoll: Angenommen, auf einer Karte sind die 11 Landeshauptstädte der Bundesrepublik Deutschland eingetragen. So kann aus der Luftlinienentfernung in km eine Rangordnung der Distanzen für alle 55 Städtepaare abgeleitet werden. Vergleicht man die mit Hilfe der nichtmetrischen MDS ermittelte Lage der 11 Punkte mit der Originalposition der Städte, so sind beide Konfigurationen (fast) deckungsgleich. Vgl. NEIDELL, L.A.: The use of nonmetric multidimensional scaling in marketing analysis, a.a.O., S. 273 f.

keine Konfiguration der Punkte, sondern es werden nur die Rangordnungen der Stimuli in jeder Dimension des Raumes bestimmt. Das bedeutet, daß auch der Output ordinalskaliert ist.

Klassifiziert man die MDS-Verfahren mit Hilfe des Skalenniveaus des Inputs (der Ausgangsdaten) und dem des Outputs (des Ergebnisses), so ergeben sich die in Übersicht 6 dargestellten 3 Gruppen von MDS-Verfahren:

Input / Output	ordinalskaliert	verhältnis- oder intervallskaliert
ordinal-skaliert	vollkommen nicht-metrische MDS	nicht relevant
verhältnis-skaliert	nichtmetrische MDS	metrische MDS

Übers. 6: Die Klassifikation der MDS-Verfahren mittels der Input-Outputbeziehungen

Die metrischen[1] und nichtmetrischen[2] Verfahren werden später noch eingehend dargestellt. Die Methoden der vollkommen nichtmetrischen mehrdimensionalen Skalierung, wie sie bei COOMBS[3] beschrieben werden, sind bei Marketingfragestellungen von geringem praktischen Interesse, weil sie keine anschauliche Konfiguration der Punkte im mehrdimensionalen Raum ermitteln und wesentliche metrische Informationen, die in den ordinalen Ausgangsdaten enthalten sind[4], nicht berücksichtigen. Auf ihre Beschreibung wird daher verzichtet.

---

1 Vgl. Kapitel 5 dieser Arbeit.

2 Vgl. Kapitel 6 dieser Arbeit.

3 COOMBS, C.H.: A theory of data, New York 1964, S. 140 ff.

4 SHEPARD, R.N.: Metric structures in ordinal data, in: Journal of Mathematical Psychology, Vol. 3 (1966), S. 287-315.

3.5 Unterscheidung der MDS-Verfahren nach Inhalt und Zusammenfassung der Ausgangsdaten

Grundsätzlich kann man mit Hilfe der MDS-Verfahren zwei Arten von Ausgangsdaten, nämlich Ähnlichkeits- und/oder Präferenzdaten, verarbeiten. Unter Ähnlichkeit soll hier die Engheit der Beziehungen zwischen Objektpaaren verstanden werden. Dabei ist das Ähnlichkeitskriterium eine Zusammenfassung verschiedener Subkriterien und somit in der Regel mehrdimensional[1]. Der Begriffsinhalt der Ähnlichkeit ist vom Untersuchungszweck abhängig. Bezeichnet man z.B. zwei Politiker als "ähnlich", so impliziert dies eine relative Kongruenz hinsichtlich relevanter Einzelkriterien wie Parteizugehörigkeit, Verhalten usw. Benutzt man den Begriff Ähnlichkeit beim Vergleich zweier Automarken, so bedeutet das eine gewisse Übereinstimmung bezüglich völlig anderer Einzeldimensionen, wie z.B. Wirtschaftlichkeit, Komfort usw. Stellen $i,j = 1,2,\ldots,n$ beliebige Objekte dar, so läßt sich für jedes Objektpaar (i, j) ein Ähnlichkeitswert e_{ij} berechnen. Es gibt für n Objekte $\binom{n}{2} = n\,(n-1)/2$ Ähnlichkeitswerte. Aus den Ähnlichkeitsurteilen der Vpn lassen sich $\binom{n}{2}$ psychologische Distanzen d_{ij} ermitteln. Sie sind nichts anderes als der Abstand zwischen den Objekten i und j im unbekannten Wahrnehmungsraum. Mit Hilfe der MDS-Verfahren kann dann aus den Distanzen die Konfiguration der n Punkte konstruiert werden. Input für das MDS-Verfahren sind Ähnlichkeitsdaten, und als Output liefert das Programm die

---

1 ATTNEAVE, R.: Dimensions of similarity, in: American Journal of Psychology, Vol. 63 (1950), S. 516-556.

Konfiguration der Punkte im Raum, wie Abb. 2 beispielhaft für fünf Produkte (A, B, C, D und E) im zweidimensionalen Fall verdeutlicht.

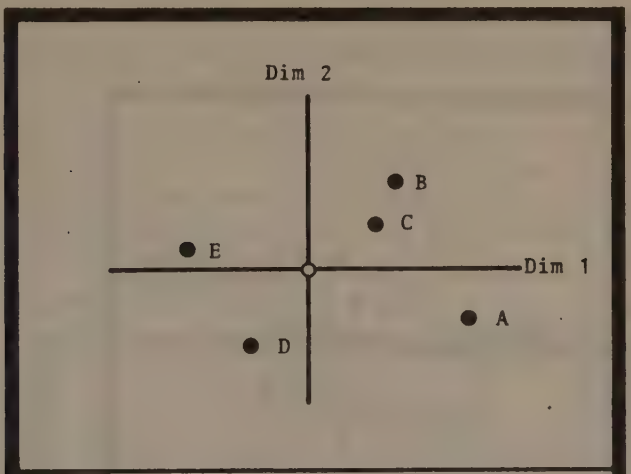


Abb.2: Die Lage von fünf Produkten im zweidimensionalen Wahrnehmungsraum

P r ä f e r e n z daten[1] beziehen sich auf die Vorliebe für bestimmte Objekte. Als Kriterium für die Präferenz gilt die Ähnlichkeit (Distanz) eines einem Objekt zugeordneten Punktes vom Idealpunkt. Dieser ist ein hypothetischer Punkt, der so im psychologischen Wahrnehmungsraum liegt, daß er ein Höchstmaß an Vorziehenswürdigkeit repräsentiert[2]. Die Verarbeitung von Präferenzdaten läßt sich mit dem Vektor- und dem Idealpunktmodell darstellen.

---

1 Vgl. CARROLL, J.D.: Models and methods for multidimensional preference analysis, Handout for Bell-Penn MDS-Workshop (unveröffentlicht), Murray Hill o.Zeitangabe, S. 1-16 mit Anhang.

2 COOMBS, C.H.: A theory of data, New York 1964, S. 8 ff.

Beim Vektormodell[1] wird unterstellt, daß durch den Ursprung der mit Ähnlichkeitsdaten erstellten Punktekonfiguration ein Fahrstrahl verläuft, dessen Richtung ein Ansteigen der Präferenz anzeigt. Die Projektion der Punkte auf diesen Vektor zeigt ihre Vorziehungswürdigkeit an und determiniert Lage und Richtung des Vektors.

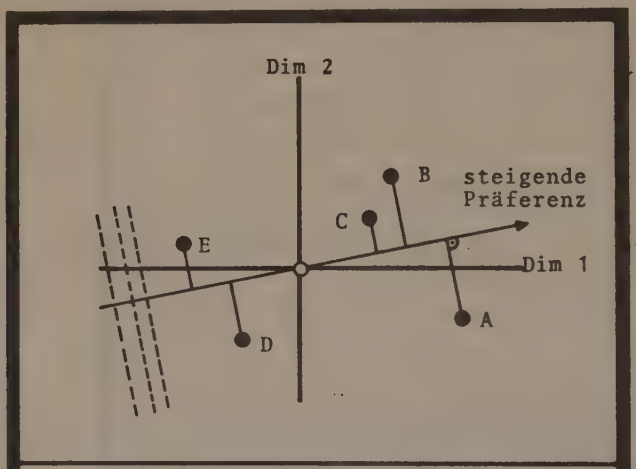


Abb. 3: Vektordarstellung für die Präferenzfolge: A > B > C > D > E

Angenommen, durch die Vpn wäre die Präferenzrangordnung A > B > C > D > E (lies: A ist mehr vorzuziehen als B usw.) abgegeben worden, so kann man in die Abb. 2 einen Vektor legen, der die Richtung zunehmender Vorziehenswürdigkeit anzeigt, und es ergibt sich Abb. 3. Der Idealpunkt liegt im Unendlichen der Verlängerung des Vektors. Jede Isopräferenzlinie (---), d.h. der geometrische Ort gleicher Vorziehenswürdigkeit,verläuft somit rechtwinklig zum Vektor.

---

1 Vgl. GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, a.a.O., S. 74 ff.

Ein weiteres Modell im Rahmen der Präferenzanalyse ist das sog. Idealpunktmodell[1]. Für eine gegebene Punktekonfiguration kann die Lage eines Idealpunktes festgelegt werden. Die Position des Idealpunktes (I) wird dabei so bestimmt, daß die Präferenzrangordnung der Objekte in einer monotonen Beziehung zu der Distanz zwischen den Objekten und dem Idealpunkt steht.

Beispiel: Mit Hilfe von Ähnlichkeitsdaten sei die Lage von fünf Produkten (A, B, C, D und E) im zweidimensionalen Raum bestimmt worden (vgl. Abb. 2). Die Vp äußert die Präferenzrangordnung: C > B > D > E > A. Die Lage des Idealpunktes (o) ist somit implizit festgelegt, wie Abb. 4 veranschaulicht.

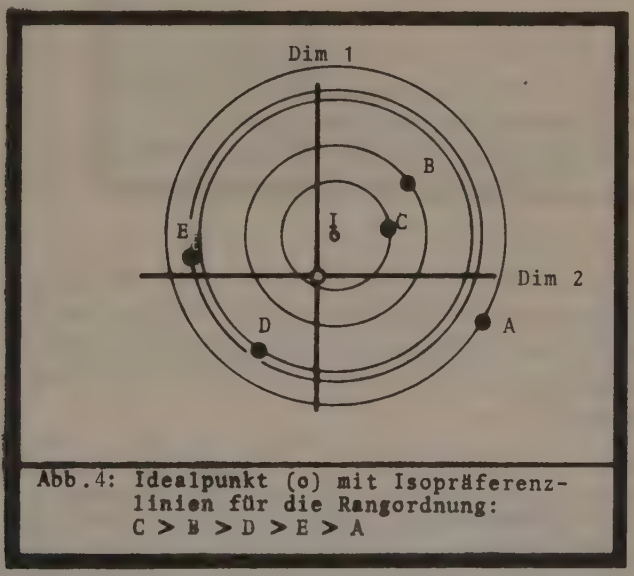


Abb.4: Idealpunkt (o) mit Isopräferenzlinien für die Rangordnung: C > B > D > E > A

Je näher die kreisförmigen Isopräferenzlinien am Idealpunkt liegen, desto größer die Vorziehenswürdigkeit.

---

1 Vgl. GREEN, P.E. und TULL, D.S.: Research for marketing decisions, Prentice Hall 1970, S. 232.

Zwischen der Präferenzordnung und der Distanz vom Idealpunkt zum Objekt (A, B, C, D oder E) besteht eine monotone Beziehung, wie Abb. 5 verdeutlicht.

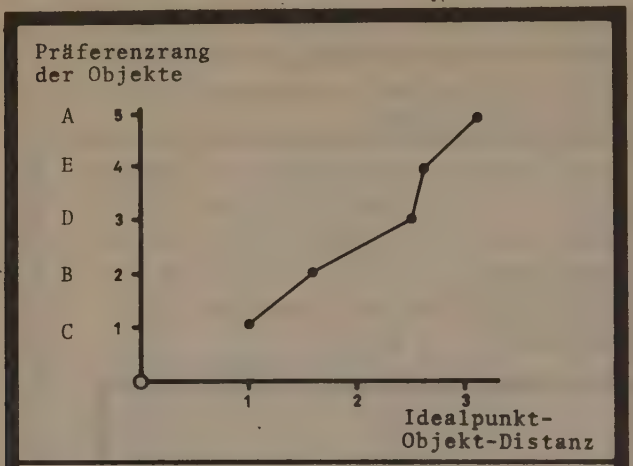


Abb. 5: **Darstellung der monotonen Beziehung zwischen Präferenzrang und Idealpunkt-Objekt-Distanz**

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß Ähnlichkeitsdaten zur Bestimmung der Position der Objekte im Raum und Präferenzdaten zur Festlegung des Idealpunktes erhoben werden müssen; dieser Ansatz wird als implizites Idealpunktmodell bezeichnet[1].

---

1 Der Vollständigkeit halber sei hier noch auf das sog. explizite Idealpunktmodell hingewiesen. NEIDELL legte den Vpn Realprodukte (A, B, C, D und E) vor und bezog ein Idealprodukt (I) direkt in die Ähnlichkeitsschätzungen mit ein. Die Vpn sollten sich ein "perfektes" Objekt ihrer Wahl vorstellen, welches in die Produktklasse des untersuchten Marktes fiel. Die Vpn stellten sich also explizit ein Idealprodukt vor. Dieses explizite Idealpunktmodell besitzt den Vorteil, daß nur Ähnlichkeitsdaten erhoben zu werden brauchen. Vgl. NEIDELL, L.A.: Physician perception and evaluation of selected ethical drugs: An application of nonmetric multidimensional scaling to pharmaceutical marketing, Diss., University of Pennsylvania 1969, S. 208 ff.; HOMAYOUNFAR, F.: Evaluation of market potential for new industrial products: An application of multidimensional scaling techniques, Diss., University of Stanford 1970, S. 47.

Neben der Unterscheidung zwischen der Verarbeitung von Ähnlichkeits- und Präferenzdaten bezieht sich ein weiteres Unterscheidungsmerkmal zur Aufteilung der Gesamtheit der MDS-Verfahren auf die Zusammenfassung der einzelnen Vpn-Urteile. A g g r e g i e r e n d e MDS-Verfahren bilden über sämtliche Vpn eine zusammengefaßte Ähnlichkeits- bzw. Präferenzmatrix. Aggregierende Modelle haben ihre Berechtigung z.B. bei Wahrnehmung und Präferenz bestimmter homogener Kundensegmente. Sind die Vpn in ihrer Urteilsstruktur allerdings nicht gleichartig, so ist diese Vorgehensweise problematisch. Die Aggregation der Einzelwerte kann u.U. statistische Konstrukte produzieren. So sind die "durchschnittliche Wahrnehmung" bzw. der "durchschnittliche Käufer" Größen, welche realiter gar nicht existieren. Individuelle Wahrnehmungs- und Vorrangsunterschiede zwischen den einzelnen Objekten werden in den n i c h t a g g r e g i e r e n d e n Verfahren berücksichtigt. Es werden für jede Vp getrennt Wahrnehmungsräume, Idealpunkte und Präferenzvektoren analysiert[1].

---

1 Vgl. Kapitel 7 dieser Arbeit.

4 BEZIEHUNGEN ZWISCHEN ÄHNLICHKEIT UND DISTANZ

4.1 Skalierung der Ähnlichkeit

An anderer Stelle der Arbeit ist bereits angedeutet worden, daß die mehrdimensionalen Skalierungsverfahren in der Regel dazu benutzt werden, globale Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen Objekten mit Hilfe einer Punktekonfiguration im mehrdimensionalen Raum darzustellen. Die Ähnlichkeitswerte kann man mittels direkter oder indirekter Verfahren gewinnen.
Bei den d i r e k t e n Methoden[1] muß die Ähnlichkeit eines Objektes i = 1,2,...,n mit einem Objekt j = 1,2,...,n (j≠i) unmittelbar beurteilt werden. Hier werden also - im Gegensatz zur gewöhnlichen eindimensionalen Skalierung - nicht mehr einzelne Objekte hinsichtlich einer konkreten Eigenschaft, sondern Objektpaare hinsichtlich der komplexen Ähnlichkeit skaliert. Dazu werden die $\binom{n}{2}$ Objektpaare (i,j) auf einem (Un-)Ähnlichkeitskontinuum abgebildet, und man erhält für jede Zweierkombination einen (Un-)Ähnlichkeitswert e_{ij} ($\bar{e}_{ij}$). So ergibt sich, indem man ein beliebiges eindimensionales Skalierungsverfahren anwendet, z.B. bei n = 4 Objekten (A, B, C und D) für $\binom{4}{2} = 6$ Objektpaare (AB, AC,...,CD) folgende Anordnung auf einer Ähnlichkeitsskala, wie Abb. 6 verdeutlicht.

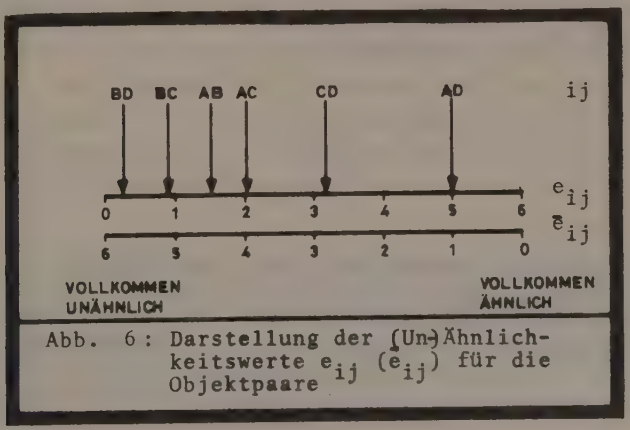


Abb. 6: Darstellung der (Un-)Ähnlichkeitswerte e_{ij} ($\bar{e}_{ij}$) für die Objektpaare

1 Vgl. Abschnitt 8.2 dieser Arbeit.

Bei den i n d i r e k t e n Methoden werden die Ähnlichkeiten aus den Verhaltensweisen der Vpn oder aus Größen, wie z.B. Korrelationskoeffizienten oder Übergangswahrscheinlichkeiten abgeleitet.
Verwechseln die Vpn häufig zwei Produkte, so sind diese beiden untereinander ähnlicher als solche Produkte, die jederzeit von den Vpn unterschieden werden können. Insofern stellen die Verwechslungshäufigkeiten ein Ähnlichkeitsmaß dar, welches aus dem Verhalten der Konsumenten ermittelt wird.
Man kann die Vpn aber auch bitten, die Produkte anhand von 10 bis 15 Eigenschaften zu beurteilen und anschließend für jedes Produktpaar einen Korrelationskoeffizienten r_{ij} berechnen. Die absolute Höhe dieses Korrelationskoeffizienten ist dann ein Maß für die Ähnlichkeit eines Produktpaares:

$$e_{ij} = |r_{ij}|$$

Eine andere indirekte Vorgehensweise[1] zur Ermittlung von Ähnlichkeitswerten besteht z.B. darin, die Wahrscheinlichkeit w_{ij} (w_{ji}) zu ermitteln, die angibt, wie oft beim Kauf von Produkt i (j) zum Produkt j (i) gewechselt wird. Derartige Übergangswahrscheinlichkeiten, wie sie auch zur Darstellung von MARKOW'schen Prozessen verwandt werden, sind unter anderem dadurch gekennzeichnet, daß in der Regel $w_{ij} \neq w_{ji}$ ist. Da aber für die Ähnlichkeitswerte $e_{ij} = e_{ji}$ gelten muß, werden diese nach folgender Formel abgeleitet:

$$e_{ij} = \frac{w_{ij}\, w_{ji}}{w_{ii}\, w_{jj}}$$

---

1 Vgl. GREEN, P.E., CARMONE, F.J. und ROBINSON, P.J.: A comparison of perceptual mapping via confusions data and direct similarity judgments, in: KING, R.L. (Hrsg.): Proceedings of the Denver Conference of the American Marketing Association, Chicago 1968, S. 323-334, hier S. 324.

Bei der Abbildung der Ähnlichkeitsrelationen durch eine Punktekonfiguration sollen unterschiedliche Ähnlichkeiten von Objektpaaren als unterschiedliche räumliche Abstände zwischen Punktepaaren dargestellt werden. Je ähnlicher zwei Objekte sind, desto näher liegen die entsprechenden Punkte im Raum zusammen, und je unähnlicher sie sind, desto weiter sind ihre Punkte voneinander entfernt. Dieser Analogschluß und die Art des damit unterstellten Raumes ist keineswegs zwingend und nicht ganz unproblematisch[1]. So sind Räume denkbar, die mit unserer Vorstellung nicht übereinstimmen. Es können Merkmalsräume durch sehr viele Dimensionen aufgespannt werden, während unsere visuelle Vorstellungskraft bei drei Dimensionen endet. Außerdem ist es durchaus möglich, daß die Koordinatenachsen nicht orthogonal, d.h. senkrecht zueinander stehen. Weiterhin sind die Meßeinheiten der Merkmale meist ungleich (DM, Pfennig), unvergleichbar (Preis, Marktanteil) oder sogar ohne bestimmte Annahmen nicht metrisch meßbar (Prestige, Kaufanreiz). Trotz dieser Schwierigkeiten bedient man sich einer Punktedarstellung im metrischen Raum, weil sie anschaulich ist, die Ergebnisinterpretation erleichtert und sich beim Algorithmus erhebliche Rechenvereinfachungen ergeben.

Es müssen nun aber noch die Bedingungen genannt werden, unter denen die Ähnlichkeitsmaße als räumliche Entfernungen betrachtet werden können. Da die Darstellung der Punkte aus den obengenannten Gründen in einem metrischen Raum erfolgt, muß dieser noch charakterisiert werden. Ein metrischer Raum kann durch eine Distanzfunktion d_{ij}, die den Abstand zwischen zwei Punkten i und j (i,j = 1,2,...,n) wiedergibt, definiert werden. Dabei muß die Distanzfunktion folgende drei Distanzaxiome[2] erfüllen:

---

1 SODEUR, W.: Empirische Verfahren zur Klassifikation, in SCHEUCH, E.K. und SAHNER, H. (Hrsg.): Studienskripten zur Soziologie, Bd. 42, Stuttgart 1974, S. 13 und S. 76 ff.

2 BEALS, R., KRANTZ, D.H. und TVERSKY, A.: Foundations of multidimensional scaling, in: Psychological Review, Vol. 75 (1968), S. 127-142.

(1) Die Nichtnegativitätsbedingung besagt, daß der Abstand zwischen zwei unterschiedlichen Punkten positiv ist.

$$d_{ij} > 0 \quad \text{für alle } i \neq j$$

Die Distanz eines Punktes von sich selbst ist 0, da der Punkt ein geometrischer Ort ohne räumliche Ausdehnung ist. Der Abstand ist nur dann 0, wenn zwei Punkte identisch sind.

$$d_{ij} = 0 \quad \text{für alle } i = j$$

Eine Distanz kann somit nie negativ werden.

(2) Die Symmetriebedingung fordert, daß der Abstand von einem Punkt i nach Punkt j gleich der Distanz von j nach i ist.

$$d_{ij} = d_{ji}$$

(3) Die Dreiecksungleichung verlangt, daß die Distanz zwischen Punkt i und j kleiner oder gleich der Summe der Abstände von Punkt i und von j nach einem beliebigen Punkt k ist.

$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{jk}$$

Bei den metrischen (MMDS) bzw. bei den nichtmetrischen (NMDS) mehrdimensionalen Skalierungen wird unterstellt, daß die Distanzen d_{ij}, die sich aus der Punktekonfiguration ergeben, möglichst in einer linearen (L) bzw. monotonen (M) Beziehung zu den entsprechenden Ähnlichkeitswerten e_{ij} stehen:

$$d_{ij} \overset{L}{=} e_{ij} \quad \text{bei MMDS}$$

$$d_{ij} \overset{M}{=} e_{ij} \quad \text{bei NMDS}$$

Um dies überprüfen zu können, muß aber eine formale Vorschrift formuliert werden, wie sich die Distanzen d_{ij} berechnen lassen. Dabei ist die Distanzermittlung mit Hilfe von MINKOWSKI-Metriken am gebräuchlichsten, da überprüft worden ist, daß sie sowohl die Distanzaxiome erfüllen als auch andere nützliche Eigenschaften besitzen[1].

1 Vgl. SCHOBERT, R.: Die mehrdimensionale Skalierung als Instrument der Absatzforschung, a.a.O., S. 8 ff.

4.2 Begriff und Bedeutung der MINKOWSKI-Metriken

Ausgangspunkt und notwendige Voraussetzung der MINKOWSKI-Metriken[1] ist die dimensionale Dekomponierbarkeit der Gesamtdistanz d_{ij}. Die Distanzen der Objekte im metrischen Raum werden durch deren Abstände in den einzelnen Dimensionen, den sog. spezifischen absoluten Δ_t, determiniert. Dabei ist Δ_t gleich dem Abstand von Punkt i nach Punkt j in der Dimension t. Bezeichnet man die Gesamtdistanz zwischen i und j mit d_{ij}, den Koordinatenwert des Punktes i auf der Dimension t mit x_{it} und den Parameter der Metrik mit p, so sind die M I N K O W S K I - M e t r i k e n definiert als:

$$p\,d_{ij} = \left[\sum_{t=1}^{r} | x_{it} - x_{jt} |^{p} \right]^{1/p} = \sqrt[p]{\sum_{t} \Delta_t^p} \quad ; \quad 1 \leq p \leq \infty$$

Da der Metrikparameter p zwischen +1 und ∞ frei variiert werden kann, gibt es unabzählbar viele Distanzmaße der obengenannten Art. Die Untergrenze auf p = 1 erklärt sich aus der Dreiecksungleichung, da für $p < 1$ diese Restriktion verletzt wird. Der Parameter p besitzt eine gewisse Gewichtungseigenschaft für die einzelnen Dimensionen[2]. Das Ansteigen von p wirkt sich auf die kleineren dimensionsspezifischen Distanzen stärker als auf die größeren aus: für große p ist der Beitrag der kleinen Δ_t unbedeutend. Im Grenzfall, wenn $p \to \infty$ geht, ist nur noch der maximale Abstand Δ_t^{max} auf einer Dimension interessant und identisch mit der Gesamtdistanz. Die Variationsmöglichkeit von p erlaubt die Definition von drei Metriken, die wichtig

---

1 Vgl. GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, a.a.O.,S.24 ff.; AHRENS, H.J.: Zur Verwendung des Metrikparameters multidimensionaler Skalierungen bei der Analyse von Wahrnehmungsstrukturen, in: Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie, Bd. 19 (1972), S. 173-195.

2 WENDER, K.: Die Metrik der multidimensionalen Skalierung als Funktion der Urteilsgeschwindigkeit, in: Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie, Bd. 18 (1971), S. 168 ff.

sind. Es handelt sich dabei um die City-Block-Metrik[1], die Euklidische Metrik und die Supremum-Metrik.

Die C i t y - B l o c k - M e t r i k ist ein Spezialfall der allgemeinen Potenz-Metrik mit dem Parameter p = 1. Sie ist somit definiert als:

$$_1 d_{ij} = \sum_{t=1}^{r} |x_{it} - x_{jt}| = \Sigma \Delta_t$$

Das bedeutet, daß sich die Globaldistanz additiv aus den spezifischen Distanzen zusammensetzt. Der Name City-Block-Metrik orientiert sich an einer Stadt, deren Straßen rechtwinklig zueinander verlaufen. Die Fahrtstrecke zwischen zwei Orten i und j könnte mit dieser Metrik ermittelt werden.
Von hervorragender praktischer Relevanz ist die sog. E u k l i d i s c h e M e t r i k, die durch einen p-Wert von 2 gekennzeichnet ist. Die Distanz zwischen zwei Punkten ergibt sich aus dem Satz von PYTHAGORAS, der immer dann angewendet werden kann, wenn alle Dimensionen im Wahrnehmungsraum ein gleichgewichtiges Ordnungskriterium für die skalierten Objekte darstellen[2]. Die Euklidische Metrik ist somit definiert als:

$$_2 d_{ij} = \sqrt{\sum_{t=1}^{r} (x_{it} - x_{jt})^2} = \sqrt{\Sigma \Delta_t^2}$$

Die Dreiecksungleichung läßt sich hier leicht dadurch charakterisieren, daß die Summe zweier Dreiecksseiten größer ist als die verbleibende Seite. Der Vorteil der Euklidischen Metrik liegt darin, daß sie der 'normalen' Vorstellung eines Abstandes am nächsten kommt.
Berücksichtigt die Vp jedoch nur den größten Merkmalsunter-

---

1 ATTNEAVE, F.: Dimensions of similarity, a.a.O., S. 516-556.

2 MICKO, H.C.: Räumliche Modelle für die multidimensionale Skalierung, in: MERZ, F. (Hrsg.): Bericht über den 25. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie, Münster 1966, S. 257.

schied in einer Dimension des Wahrnehmungsraumes, so ist die Gesamtdistanz durch das Maximum einer spezifischen Distanz Δ_t^{max} bestimmt. Dominiert diese Dimension alle anderen, so erweist sich die S u p r e m u m m e t r i k (Dominanzmetrik) als angemessen. Hierbei handelt es sich um einen weiteren Sonderfall der MINKOWSKI-Metrik mit einem Parameter $p \to \infty$.

$$\infty d_{ij} = \max \left\{ |x_{it} - x_{jt}| \right\} = \max \left\{ \Delta_t \right\} \quad t=1,2,..,r$$

MINKOWSKI-Metriken haben in der mehrdimensionalen Skalierung insbesondere deshalb ihre B e d e u t u n g, weil sie sehr anpassungsfähig an die individuelle Urteilsstruktur sind. Daher sind sie verschieden zu interpretieren[1], wie folgendes Beispiel verdeutlichen soll: Drei Vpn sollen die Ähnlichkeit von $n = 3$ Zubereitungsarten i, j und k der Kaffeemarke 'Goldfein' beurteilen. Es werden drei Kannen mit Kaffee vorbereitet, deren Inhalt sich nur durch die Stärke des Kaffees (Anzahl der Mengeneinheiten Kaffee pro Kanne) und die Süße (Anzahl der Mengeneinheiten Zucker pro Kanne) unterscheidet.

Zubereitungsart	Süße	Stärke
i	5	5
j	2	9
k	7	9

Wenn der Zucker- und Kaffeegehalt der drei Zubereitungsarten bekannt sind, ordnen sämtliche Versuchspersonen den einzelnen Kaffeekannen jeweils gleiche numerische Skalenwerte x_{it}, x_{jt} und x_{kt} hinsichtlich der beiden Beurteilungs-

---

1 Vgl. WENDER, K.: Die psychologische Interpretation nichteuklidischer Metriken in der multidimensionalen Skalierung, Diss., Darmstadt 1969; SHERMAN, C.R.: Nonmetric multidimensional scaling: A Monte Carlo study of the basic parameters, a.a.O., S. 328; WENDER, K.: Die Metrik der Multidimensionalen Skalierung als Funktion der Urteilsgeschwindigkeit, a.a.O., S. 166-182.

dimensionen t = 1 'Süße' und t = 2 'Stärke' zu, wie in Abb. 7 veranschaulicht ist.

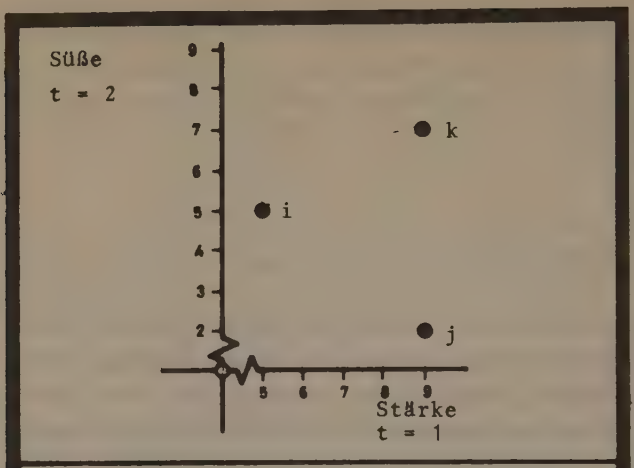


Abb. 7: Die Lage von n = 3 Zubereitungsarten von Kaffee im zweidimensionalen Raum

Die gleiche Wahrnehmung der Beurteilungsgegenstände i, j und k durch die Vpn besagt aber nicht, daß die Ähnlichkeitsurteile e_{ij}, e_{ik} und e_{jk} der Probanden über die Objektpaare (i,j), (i,k) und (j,k) ebenfalls identisch sind. So urteilen u.U. drei Vpn folgendermaßen:

Vp 1 verarbeitet die dimensionsspezifischen Merkmalsdifferenzen eines Objektpaares durch Addition zu einem Ähnlichkeitsurteil. Die Ähnlichkeit zweier Kaffees ergibt sich also aus dem Unterschied in der Süße plus dem Unterschied in der Stärke.

$$\text{Vp 1 urteilt: } e_{ij} < e_{jk} \quad \text{bzw.} \quad \bar{e}_{ij} > \bar{e}_{jk}$$

Die City-Block-Metrik ist das adäquate Distanzmodell (p = 1).

Vp 2 gewichtet die Beurteilungsdimensionen Kaffeestärke und -süße gleich. Ihr Ähnlichkeitsurteil richtet sich nach der

'Luftlinie' zwischen zwei Punkten. Für sie gilt somit, daß das Objektpaar (i,j) genau so ähnlich ist wie das Paar (j,k).

Vp 2 urteilt: $e_{ij} = e_{jk}$ bzw. $\bar{e}_{ij} = \bar{e}_{jk}$

Hier erweist sich eine Euklidische Metrik als angemessen ($p = 2$).

Vp 3 orientiert ihr Ähnlichkeitsurteil nach der Dimension, auf der sich zwei Zubereitungsarten am meisten unterscheiden. Für Paar (i,j) ist das die Kaffeestärke und für Paar (j,k) ist es die Süße.

Vp 3 urteilt: $e_{ij} > e_{jk}$ bzw. $\bar{e}_{ij} < \bar{e}_{jk}$

Da die Vp 3 jeweils nur die Richtung des Wahrnehmungsraumes berücksichtigt, in der die Merkmalsdifferenzen eines Objektpaares am größten sind, dominiert diese Dimension alle anderen. Die Ähnlichkeitsurteile werden dann am besten durch eine Dominanzmetrik verarbeitet ($p \to \infty$).

Für die Auswahl des MINKOWSKI-Parameters p gibt es bisher keine allgemein gültigen Regeln. Es bleibt nur die Möglichkeit, alternative p-Werte durchzutesten[1]. Bei praktischen Anwendungen wird meist ungeprüft die Euklidische Metrik verwendet.

4.3 Eigenschaften von MINKOWSKI-Metriken

Die durch die mehrdimensionalen Skalierungen gewonnenen Punktekonfigurationen sind relativ willkürlich in einem Koordinatensystem, dessen Achsen keineswegs auf Anhieb zu interpretieren sind, dargestellt. Daher sind die Nullpunktverschiebung (Translation) und die Drehung des Koordinatensystems (Rotation) beliebte Hilfsmittel zur Interpretation

---

1 SHERMAN, C.R.: Nonmetric multidimensional scaling: A Monte Carlo study of the basic parameters, a.a.O., S. 323-355, hier S. 328 ff. und S. 353.

des MDS-Outputs. Es bleibt aber zu prüfen, ob dadurch nicht der numerische Wert für die Distanz zwischen zwei Punkten verändert wird. Deshalb müssen zunächst drei ausgewählte Eigenschaften der MINKOWSKI-Metriken näher untersucht werden. Es handelt sich dabei um die (1) Translationeninvarianz, die (2) Homogenitätseigenschaft und die (3) Rotations(in)varianz[1]. Daran anschließend werden geometrische Figuren abgeleitet, die zur optischen Interpretation der Konfigurationen nützlich sind.

(1) Die Translationeninvarianz besagt, daß alle mit Hilfe von MINKOWSKI-Metriken quantifizierten Distanzen durch eine Nullpunktverschiebung in ihrer numerischen Höhe unverändert bleiben. Stellen i' und j' die transformierten Werte für die Originalpunkte i und j dar, so läßt sich der Zusammenhang formal darstellen als

$$p^{d}_{ij} = p^{d}_{i'j'} \quad .$$

(2) Wenn zwei Punkte i und j eindeutig durch die dazugehörigen Vektoren x und y bestimmt sind und man die Vektoren auf das $\bar{k}$-fache streckt, so vergrößert sich die Distanz ebenfalls auf das $\bar{k}$-fache. Grundsätzlich sind alle MINKOWSKI-Metriken homogen, d.h.

$$p^{d}(\bar{k}\, x, \bar{k}\, y) = \bar{k}_{p}d\ (x,y) \quad .$$

Das bedeutet, daß die Angabe des Koordinatenwertes eines Punktes nicht aussagekräftig ist. Eine sinnvolle Analyse ist erst dann möglich, wenn man die relative Lage eines Punktes zu den anderen untersucht.

---

1 GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, a.a.O., S. 24 ff.; AHRENS, H.J.: Multidimensionale Skalierung, a.a.O., S. 78 ff.

(3) Unter Rotation versteht man die Drehung des Koordinatensystems. Die Euklidische Metrik erlaubt jede beliebige Drehung. Es handelt sich dabei um eine wertvolle Eigenschaft, die den Output der MDS im metrischen Raum u.U. besser interpretierbar macht[1]. Formal bedeutet dies, wenn i' bzw. j' die Punkte im rotierten Koordinatensystem sind,

$$p^{d}_{ij} \neq p^{d}_{i'j'} \qquad p \neq 2$$

$$p^{d}_{ij} = p^{d}_{i'j'} \qquad p = 2 \quad .$$

Bei der optischen Analyse von zwei- bis dreidimensionalen Punkteanordnungen orientiert sich der Betrachter an einem Abstand, der der Euklidischen Metrik entspricht, die allerdings nicht immer unterstellt werden kann. Damit Fehlschlüsse verhindert werden können, ist es sinnvoll, geometrische Figuren abzuleiten, die einen konstanten Abstand von einem Punkt besitzen. Interessante Aufschlüsse über den geometrischen Ort von Objekten, die zu einem Bezugsreiz **O** die gleiche Distanz (Ähnlichkeit) aufweisen, geben die Isoähnlichkeitslinien (isosimilarity contours)[2]. Bei dreidimensionaler Darstellung ergeben sich je nach Höhe des MINKOWSKI-Parameters p verschiedene Körper. Bei Unterstellung der Annahme, daß derartige Objekte, die von einem Ankerreiz **O** (Origo) die gleiche Entfernung haben, das gleiche Maß an Ähnlichkeit besitzen, wird durch die Gesamtheit aller dieser Objekte im dreidimensionalen Raum die Oberfläche eines Körpers gebildet. Die durch die Linien bzw. Körper

---

1 Vgl. GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, a.a.O., S. 130 f. TORGERSON nennt dies eine 'Euklidische Transformation'. Vgl. TORGERSON, W.S.: Theory and methods of scaling, a.a.O., S. 253.

2 Vgl. SHEPARD, R.N.: Attention and the metric structure of the stimulus, in: Journal of Mathematical Psychology, Vol. (Febr. 1964), S. 54-87, hier S. 56 ff.; vgl. AHRENS, H.J.: Zur Verwendung des Metrikparameters multidimensionaler Skalierungen bei der Analyse von Wahrnehmungsstrukturen, a.a.O., S. 180 ff.; ARNOLD, J.B.: A multidimensional scaling study of semantic distance, in: Journal of Experimental Psychology, Vol. 90 (1971), S. 349-372.

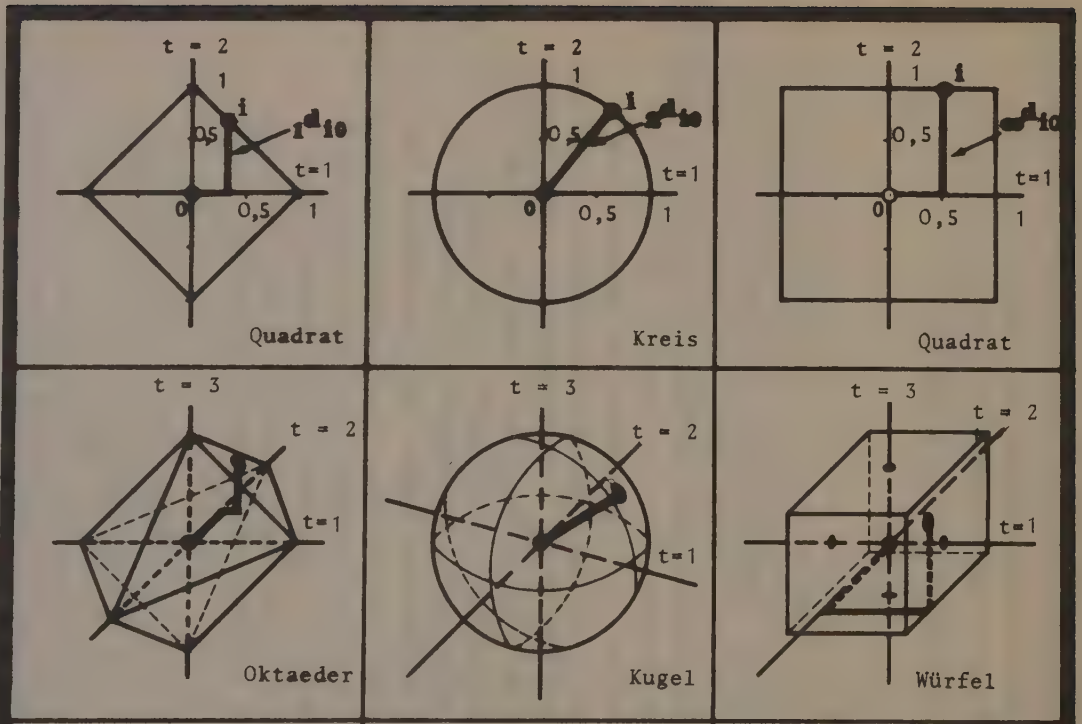


Abb. 8 : Darstellung von Linien und Körpern gleicher Ähnlichkeit

gleicher Ähnlichkeit in Abb. 8 bestimmten Kombinationen führen in allen Fällen bei Verwendung der entsprechenden Metrik zu einer konstanten Gesamtdistanz von 1. Die Linie gleicher Ähnlichkeit bei unterstellter City-Block-Metrik ergibt in der Ebene ein auf der Ecke stehendes Quadrat und im dreidimensionalen Raum ein Oktaeder, dessen Außenflächen aus gleichseitigen Dreiecken bestehen. Der resultierende geometrische Ort gleicher Distanzen der Euklidischen Metrik ist im zweidimensionalen Fall ein Kreis und für drei Dimensionen eine Kugel. Die Supremummetrik ergibt folglich ein Quadrat, dessen Seiten parallel zu den Achsen verlaufen. Der entsprechende dreidimensionale Körper ist ein Würfel.

Die Kenntnis der fundamentalen Zusammenhänge metrischer Räume, der Definition und der Bedeutung der Metriken ist notwendig zum besseren Verständnis der Prämissen und der Ansatzpunkte von MDS-Prozeduren. Insbesondere ist für den Praktiker auch die psychologische Interpretation der Metrik von Nutzen.

5 DIE METRISCHE MEHRDIMENSIONALE SKALIERUNG (MMDS)

5.1 Grundgedanken der MMDS

Die älteren Ansätze zur mehrdimensionalen Skalierung von Objekten sind metrische Verfahren. Dabei wird im wesentlichen unterschieden zwischen dem ATTNEAVE-[1], dem TORGERSON-[2] und dem CARROL-CHANG-Modell[3]. Alle Modelle der MMDS basieren, wie schon der Name andeutet, auf einem metrischen Distanzmaß. Mit Hilfe verschiedener Datenerhebungstechniken werden aus den Ähnlichkeitsurteilen Distanzen für Objektpaare abgeleitet. Derartige Distanzen sind meist nur intervallskaliert. Ihr Nullpunkt ist nicht eindeutig festgelegt. Da die MMDS aber die Lage der Punkte in einem verhältnisskalierten Koordinatenraum berechnet, müssen die intervallskalierten, vorläufigen (komparativen) Abstände mittels Nullpunktverschiebung in verhältnisskalierte, endgültige (absolute) Distanzen umgewandelt werden. Der Betrag der Nullpunktverschiebung wird als additive Konstante bezeichnet. Unterstellt man, daß es eine 'wahre' Konfiguration gibt, und gelingt es, mit Hilfe der Datenerhebungstechniken fehlerfreie absolute Distanzen zwischen den einzelnen Punkten zu ermitteln, so ist die MMDS in der Lage, exakt die richtige, d.h. 'wahre' Konfiguration aufzufinden, die allerdings rotiert und/oder verschoben sein kann. Die Bestimmung der Anzahl der Dimensionen als auch die Festlegung der Koordinatenwerte der einzelnen Punkte erfolgt mittels verschiedener Matrizenoperationen. Zunächst soll im folgenden der von TORGERSON vorgeschlagene Lösungsweg aufgezeigt und im Anschluß daran ein hypothetisches Beispiel durchgerechnet werden.

---

1 ATTNEAVE, F.: Dimensions of similarity, a.a.O., S.516-556.

2 TORGERSON, W.S.: Multidimensional scaling I. Theory and method, in: Psychometrika, Bd. 17 (1952), S. 401-419; TORGERSON, W.S.: Theory and methods of scaling, a.a.O., S. 247 ff.

3 Vgl. Kapitel 7 dieser Arbeit.

Im wesentlichen läßt sich die MMDS nach TORGERSON in drei Schritte unterteilen, wie Übersicht 7 verdeutlicht:

Schritt	Aufgabe	Symbolik[1]	mögliche Methode
1.	Ermittlung der Matrix vorläufiger Distanzen H.	$H = [h_{ij}]$ $i = 1,2,\ldots,n$ $j = 1,2,\ldots,n$ (Objekte)	direkte oder indirekte Datenerhebungstechniken
2.	Schätzung der additiven Konstanten c. Ermittlung der Matrix endgültiger Distanzen D.	c $D = [d_{ij}]$ $i = 1,2,\ldots,n$ $j = 1,2,\ldots,n$ (Objekte)	Verfahren von MESSICK und ABELSON
3.	Ermittlung der Dimensionenzahl r. Berechnung der Matrix X_i der Koordinatenwerte mit Origo im Punkt i.	r $X_i = [x_{jt}]$ $j = 1,2,\ldots,n$ $j \neq i$ (Objekte) $t = 1,2,\ldots,r$ (Dimensionen)	Verfahren von YOUNG und HOUSEHOLDER

Übers. 7: Schematische Darstellung der Vorgehensweise der metrischen mehrdimensionalen Skalierung nach TORGERSON

Im ersten Schritt werden zunächst (Un-)Ähnlichkeitsurteile mit Hilfe direkter oder indirekter Datenerhebungsmethoden in vorläufige Distanzen transformiert. Bei den direkten Verfahren gibt die Vp quantitative Urteile über die Distanz zwischen zwei Objekten unmittelbar an. So müssen z.B. Objektpaare auf einer bipolaren Ähnlichkeitsskala eingeordnet werden. Indirekte Methoden dagegen sind dadurch gekennzeichnet, daß z.B. Ordinalurteile für die Objektpaare abgegeben und daraus dann Distanzen abgeleitet werden.

---

1 Zur Symbolik vgl. auch S. 57 ff. dieser Arbeit.

Sowohl die indirekten als auch die direkten Verfahren liefern nur 'vorläufige' Distanzen h_{ij} für die Objektpaare[1] (i,j). Unter vorläufigen Distanzen versteht man intervallskalierte Abstände, d.h. die Elemente h_{ij} der Matrix $H = [h_{ij}]$ für $i, j = 1,2,\ldots,n$ besitzen einen willkürlichen Nullpunkt. Die 'vorläufigen' (komparativen) Distanzen h_{ij} müssen durch eine Verschiebung um einen Wert c in verhältnisskalierte 'endgültige' (absolute) Abstände d_{ij} umgewandelt werden, da nur die d_{ij} direkt als Input für das MMDS-Programm dienen können. Insgesamt lassen sich für n Objekte n(n-1)/2 'vorläufige' Distanzen ermitteln. Wenn man der Nichtnegativitätsbedingung Rechnung trägt, so gilt für die komparativen Distanzen h_{ij}:

(5-1) $h_{ij} = 0$ für alle $i = j$

(5-2) $h_{ij} > 0$ für alle $i \neq j$

5.2 Schätzung der additiven Konstanten

Die verhältnisskalierten Werte der Abstände d_{ij} zwischen Objektpaaren ergeben sich durch Einbeziehung der additiven Konstanten c. Deshalb muß nach der Quantifizierung der vorläufigen Distanzen im zweiten Schritt zur Berechnung der absoluten Distanzen die a d d i t i v e K o n s t a n t e ermittelt werden.

(5-3) $d_{ij} = 0$ für alle $i = j$

(5-4) $d_{ij} = h_{ij} + c$ für alle $i \neq j$

oder

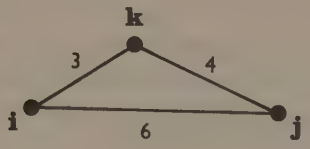
(5-5) $d_{ij} = h_{ij} + c\,(1-\delta^{ij})$ $\quad \delta^{ij} = \begin{cases} 0 \text{ wenn } i \neq j \\ 1 \text{ wenn } i = j \end{cases}$

Gleichung (5-5) besagt, daß die endgültige Distanz für Diagonalelemente der Matrix $D = [d_{ij}]$ gleich Null ist und für alle

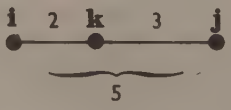
---

1 Vgl. SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, a.a.O., S. 155 und S. 333 ff.

anderen Elemente gleich der vorläufigen Distanz plus der additiven Konstanten c. Die Größe von c muß so gewählt werden, daß für die absoluten Distanzen d_{ij} die Distanzaxiome gelten und die Darstellung der Punktekonfiguration in einem möglichst gering dimensionierten metrischen Raum erfolgen kann. Inwiefern dieses Anliegen durch die geeignete Auswahl einer additiven Konstanten erreicht werden kann, soll anhand eines einfachen Beispiels dargestellt werden:
Angenommen, für drei Punkte i,j und k sind die komparativen Distanzen $h_{ij} = 4$, $h_{ik} = 1$ und $h_{jk} = 2$ ermittelt worden. Es soll nun eine optimale additive Konstante bestimmt werden. Wählt man eine additive Konstante von c = 0,5, so ergeben sich die entsprechenden absoluten Distanzen $d_{ij} = 4,5$, $d_{ik} = 1,5$ und $d_{jk} = 2,5$. Es ist nun allerdings ein Distanzaxiom, nämlich die Dreiecksungleichung, verletzt worden, da d_{ij} größer ist als $d_{ik} + d_{jk}$. Wählt man eine additive Konstante von c = 2, so werden zwar alle Distanzaxiome eingehalten, eine Darstellung der Punkte ist aber nur in einem zweidimensionalen Raum in Form eines Dreiecks möglich.



Es muß nun überprüft werden, ob durch eine andere Wahl von c die Dimensionalität der Punktekonfiguration nicht verringert werden kann. So ergibt sich bei c = 1 eine eindimensionale Lösung.



Die additive Konstante c = 1 ist also optimal, da sowohl die Distanzaxiome eingehalten werden, als auch eine Darstellung der Punkte in einem möglichst gering dimensionierten Raum ermöglicht wird.

In der Literatur sind verschiedene Möglichkeiten entwickelt worden, um die additive Konstante c zu schätzen[1]. Hier soll der von MESSICK und ABELSON[2] vorgeschlagene Lösungsweg aufgezeigt werden, der zwar recht aufwendig ist, dafür aber sehr gute Ergebnisse liefert und auf folgenden Überlegungen beruht: Es ist ohne weiteres möglich, die Distanzen zwischen Punktepaaren zu berechnen, wenn die Koordinatenwerte der Punkte bekannt sind. Schwieriger ist es allerdings, von den Distanzen auf die Punktepositionen zu schließen. Die Punktepositionen in einem euklidischen Raum lassen sich durch Faktorisierung einer n x n Matrix B^+ der Skalarprodukte ermitteln[3]. Jedes Element b^+_{ij} der Matrix B^+ stellt das Skalarprodukt der Vektoren von einem beliebigen Fixpunkt zu den Punkten i und j dar. Obwohl sich jeder Punkt im Raum als Fixpunkt eignet, wird häufig der Schwerpunkt der Punktwolke gewählt, so daß nach einigen Umformungen[4]

$$b^+_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2_{ij} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d^2_{ij} - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d^2_{ij} - d^2_{ij}\right)$$

ist, d.h. das Skalarprodukt läßt sich mit Hilfe der quadrierten euklidischen Distanzen ausdrücken.

---

1 Vgl. COOPER, L.G.: A new solution to the additive constant problem in metric multidimensional scaling, in: Psychometrika, Vol. 37 (1972), S. 311-323; LUER, G. und FILLBRANDT, H.: Ein Verfahren zur Bestimmung der additiven Konstanten in der Multidimensionalen Skalierung, in: Archiv für die gesamte Psychologie, Bd. 121 (1969), S.202-204.

2 MESSICK, S.J. und ABELSON, R.P.: The additive constant problem in multidimensional scaling, in: Psychometrika, Bd. 21 (1956), S. 1-15; SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, a.a.O., S. 333 ff.; TORGERSON, W.S.: Theory and methods of scaling, a.a.O., S. 273 ff.

3 Vgl. Abschnitt 5.3 dieser Arbeit.

4 SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, a.a.O., S. 291 ff.; TORGERSON, W.S.: Theory and methods of scaling, a.a.O., S. 257 f.

Damit die Darstellung der Punkte in einem möglichst niedrig dimensionierten Raum erfolgen kann, muß der Rang der Matrix möglichst gering sein, d.h. es sollen möglichst viele Eigenwerte von B^+ gleich (oder nur geringfügig größer als) Null sein. Die Einhaltung der Distanzaxiome wird dadurch gewährleistet, daß es sich bei B^+ um eine positiv semidefinite Matrix handeln muß. Wir können nun gemäß Formel (5-5) bei der Bestimmung der b^+_{ij} die d_{ij} durch die komparativen Distanzen h_{ij} und die additive Konstante c ersetzen. Definitionsgemäß gilt, daß die Summe der Eigenwerte der Matrix B^+ gleich der Summe der Diagonalelemente ist. Wenn die Eigenwerte von B^+ bekannt wären, könnte c ohne weiteres bestimmt werden. Umgekehrt gilt, daß die Eigenwerte Funktionen von c sind und somit ohne die additive Konstante nicht ermittelt werden können.
Um dieses Dilemma zu lösen, ist ein iteratives Verfahren zur Bestimmung der additiven Konstanten entwickelt worden, welches zunächst mit einem Versuchswert für c arbeitet und dann zur Bestimmung der optimalen additiven Konstanten führt, welche der Matrix B^+ die oben erwähnten gewünschten Eigenschaften verleiht. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen:
Im ersten Schritt wurde eine quadratische n x n Matrix

$$(5\text{-}6) \quad H_{(nn)} = \left[h_{ij}\right]_{(nn)}$$

berechnet, aus der durch Quadrierung der einzelnen Elemente

$$(5\text{-}7) \quad H^+_{(nn)} = \left[h^2_{ij}\right]_{(nn)}$$

bestimmt werden kann. Anschließend muß die Matrix der Skalarprodukte B^+ berechnet werden, die definiert ist als:

$$(5\text{-}8) \quad B^+_{(nn)} = \left[b^+_{ij}\right]_{(nn)} = U_{(nn)} + \hat{c}W_{(nn)} + 1/2\,\hat{c}^2V_{(nn)}$$

Die Größe $\hat{c}$ stellt einen Schätzwert für die unbekannte additive Konstante dar. Erfahrungsgemäß soll hier versuchsweise $\hat{c} = 4$ gesetzt werden. Grundsätzlich gilt, daß eine Überschätzung der

richtigen additiven Konstanten geringere Auswirkungen hat als eine Unterschätzung des tatsächlichen Wertes von c. Die Elemente von B^+, die man als Korrelationskoeffizienten interpretieren kann[1], lassen sich mit Hilfe der symmetrischen Matrizen U, W und V ermitteln, deren Elemente sich nach folgenden Gleichungen berechnen:

$$(5\text{-}9) \quad u_{ij} = 1/2 \left(\bar{h}^2_{i.} + \bar{h}^2_{.j} - \bar{h}^2_{..} - h^2_{ij} \right)$$

$$(5\text{-}10) \quad w_{ij} = \left(\bar{h}_{i.} + \bar{h}_{.j} - \bar{h}_{..} - h_{ij} \right)$$

$$(5\text{-}11) \quad v_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{n} & \text{für } i \neq j \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{für } i = j \end{cases}$$

Dabei bedeuten:

$$(5\text{-}12a) \quad \bar{h}_{i.} = \frac{1}{n} \sum_j h_{ij} \quad , \quad \bar{h}^2_{i.} = \frac{1}{n} \sum_j h^2_{ij}$$

$$(5\text{-}12b) \quad \bar{h}_{.j} = \frac{1}{n} \sum_i h_{ij} \quad , \quad \bar{h}^2_{.j} = \frac{1}{n} \sum_i h^2_{ij}$$

$$(5\text{-}12c) \quad \bar{h}_{..} = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} h_{ij} \quad , \quad \bar{h}^2_{..} = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j} h^2_{ij} \; .$$

Wenn r der Rang der Matrix B^+ ist, so lassen sich r von Null verschiedene Eigenwerte β_t (t = 1,2,...,r) und r normierte Eigenvektoren $\vec{a}_t$ berechnen. Die Eigenvektoren $\vec{a}_t$ werden so normiert, daß die Summe ihrer quadrierten Elemente genau eins ergibt. Wird mit $\vec{a}'_t$ der transponierte Vektor gekennzeichnet, so besteht folgender Zusammenhang:

$$(5\text{-}13) \quad \vec{a}'_t \, B^+ \, \vec{a}_t = \beta_t$$

Die so ermittelten β_t erlauben die Bestimmung der zugrunde-

---

1 SIXTL, F. und WENDER, K.: Der Zusammenhang zwischen multidimensionaler Skalierung und Faktorenanalyse, in: Biometrische Zeitschrift, Bd.6, (1964), S. 251-261, hier S. 252.

liegenden Dimensionenzahl der Konfiguration. Es entsteht nun ein Problem, welches bei faktoranalytischen Fragestellungen häufig auftaucht, nämlich die Bestimmung der Anzahl r' der 'großen' Eigenwerte. Angenommen, die r Eigenwerte β_t liegen in geordneter Form vor, beginnend mit dem numerisch größten Eigenwert, so werden r' Eigenwerte als 'groß' bezeichnet, wenn nach $\beta_{r'}$ ein auffallender Bruch in ihrer wertmäßigen Höhe auftaucht. Zum weiteren Fortgang der Rechnung werden dann nur noch die entsprechenden r' Eigenwerte bzw. -vektoren benötigt. Bei praktischer Anwendung kennt man zu Beginn die Größe r' nicht. Daher wird häufig r' = r gesetzt. Das Computerprogramm rechnet dann automatisch für r' = r bis herab zu r = 1 alle Möglichkeiten durch, und es wird nachträglich eine Entscheidung über die optimale Lösung gefällt[1]. Definitionsgemäß gilt, daß die Summe der Diagonalelemente der Matrix B^+ (Spur der Matrix) gleich der Summe der Eigenwerte ist.

$$\text{(5-14)} \qquad \sum_{i=j} b^+_{ij} = \sum_{t}^{r} \beta_t$$

Man geht nun davon aus, daß diese Gleichung annähernd für die Summierung bis r' gilt, da die 'kleinen' Eigenwerte vernachlässigt werden können. Die Spur der Matrix B^+ ist (vgl. Formel (5-8)):

$$\sum_{i=j} b^+_{ij} = \frac{n}{2} \bar{h}^2_{..} + n \bar{h}_{..} \hat{c} + \frac{1}{2} (n-1) \hat{c}^2$$

$$\text{(5-15)} \qquad = a_{11} + a_{12} \hat{c} + a_{13} \hat{c}^2$$

---

1 Vgl. STADTLER, K. und BRUNIECKI, A.: MMDS-Metrische multidimensionale Skalierung, in: Infratest Modelle und Methoden, München 1973, S. 14.

Die Summe der Eigenwerte β_t ergibt sich gemäß Formel (5-13) als:

$$\sum_t^{r'} \beta_t = \sum \vec{a}_t' U \vec{a}_t + \hat{c} \sum \vec{a}_t' W \vec{a}_t + \frac{1}{2} \hat{c}^2 \sum \vec{a}_t' V \vec{a}_t$$

$$(5\text{-}16) \qquad = a_{21} + a_{22} \hat{c} + a_{23} \hat{c}^2$$

Wie (5-16) zeigt, ist die Summe der großen Eigenwerte eine Funktion der entsprechenden normierten Eigenvektoren, der unbekannten additiven Konstanten und der komparativen Distanzen. Durch Gleichsetzen von (5-15) und (5-16) gemäß (5-14) erhält man ein quadratisches Gleichungssystem[1], welches man nach $\hat{c}$ auflösen kann, und es ergeben sich zwei Werte $\hat{c}_1$ und $\hat{c}_2$. Um zu entscheiden, welcher der beiden Schätzwerte der additiven Konstante der optimale ist, werden $\hat{c}_1$ und $\hat{c}_2$ nacheinander in (5-16) eingesetzt, und man berechnet den numerischen Wert der Summe der Eigenwerte für beide Alternativen. Derjenige Schätzwert $\hat{c}$ für die additive Konstante, der nach Einsetzen in (5-16) den höheren numerischen Wert ergibt, gilt als optimal ($\hat{c}_{opt}$).

$$(5\text{-}17) \quad \sum \beta_t(\hat{c}_{opt}) = \max \left\{ \sum \beta_t(\hat{c}_1) \; ; \; \sum \beta_t(\hat{c}_2) \right\}$$

Nach der Ermittlung von $\hat{c}_{opt}$ kann dieser Wert versuchsweise in (5-8) eingesetzt und das Verfahren nochmals berechnet werden. Ändert sich daraufhin das optimale $\hat{c}_{opt}$ nicht, so handelt es sich beim ersten Lauf um eine Überschätzung der wahren additiven Konstanten, was nur einen geringen Einfluß auf $\hat{c}_{opt}$ ausübt. Sollte sich herausstellen, daß $\hat{c}_{opt}$ sich im zweiten Lauf ändert, so empfiehlt sich eine höhere Festlegung des Versuchswertes für $\hat{c}$ ($\hat{c} > 4$). Durch die Bestimmung der additiven Konstanten ist es nun möglich, aus den

---

1 Für den (trivialen) Fall, daß r' = n-1 ist, ergibt sich wegen der Gleichheit von a_{23} und a_{13} nur eine lineare Gleichung.

intervallskalierten h_{ij} verhältnisskalierte d_{ij} zu berechnen, gemäß (5-5).

$$(5\text{-}18) \qquad D_{(nn)} = \left[d_{ij} \right]_{(nn)}$$

$$= h_{ij} + \hat{c}_{opt} \, (1 - \delta^{ij})_{(nn)}$$

Sind die absoluten Distanzen d_{ij} ermittelt, so ist es möglich, die Dimensionenzahl festzulegen und die Koordinatenwerte der Punkte zu bestimmen.

5.3 Dimensionsdeterminierung und Koordinatenwertbestimmung

Ausgangspunkt des dritten Schritts der MMDS sind die absoluten Distanzen. Es sollen nun die Anzahl der Urteilsdimensionen bestimmt und die Positionen der n Objekte im metrischen Raum festgelegt werden. Dabei werden die Punkte so im Raum angeordnet, daß ihr Abstand eine möglichst gute Reproduktion der endgültigen Distanzen d_{ij} darstellt. Der Algorithmus beruht auf den Ausführungen von YOUNG und HOUSEHOLDER[1]. Es wird ein metrischer Raum mit orthogonalem Koordinatensystem vorausgesetzt.

Die Anzahl der Urteilsdimensionen ist gleich dem Rang einer Skalarproduktmatrix B. Bezeichnet man mit i,j,k = 1,2,...,n Punkte in einem euklidischen Raum und mit d_{ij}, d_{ik} und d_{jk} die Distanzen zwischen diesen Punkten, so stellt b_{jk} das Skalarprodukt der Vektoren von Punkt i zu Punkt j und k dar.

$$(5\text{-}19) \qquad b_{jk} = 1/2 \, (d_{ij}^2 + d_{ik}^2 - d_{jk}^2)$$

---

1 YOUNG, G. und HOUSEHOLDER, A.S.: Discussion of set of points in terms of their mutual distances, in: Psychometrika, Vol.3 (March 1938), S. 19-22; vgl. AHRENS, H.J.: Multidimensionale Skalierung, a.a.O., S. 80 f. und S. 89 ff.

Für jeden Punkt i kann die Matrix der Skalarprodukte B_i aufgestellt werden. Es wird unterstellt, daß der Punkt i im Ursprung des Koordinatensystems liegt. Die Matrix B_i besitzt also nicht die i-te Zeile und Spalte. Die (n-1)x(n-1) Matrix B_i ist somit definiert als:

$$(5\text{-}20) \quad B_{i\ (n-1,\ n-1)} = \left[b_{jk}\right]_{(n-1,\ n-1)}$$

Man berechnet B_i zunächst für den Punkt i = 1 . Anschließend muß überprüft werden, ob B_i positiv semidefinit ist, d.h. sämtliche Hauptabschnittsdeterminanten müssen größer als Null und mindestens eine muß gleich Null sein. Nur wenn die Matrix positiv semidefinit ist, wird die Dreiecksungleichung eingehalten[1]. Ist das nicht der Fall, so wird B_{i+1} berechnet. Die zugrundeliegende Dimensionenzahl r ergibt sich aus dem Rang r_i der ersten auftretenden positiv semidefiniten Matrix B_i. Es ist somit festgelegt worden, wieviel Dimensionen notwendig sind, um die Distanzen d_{ij} im Raum abzubilden.

Die Bestimmung der P o s i t i o n d e r P u n k t e j=1,2,...,n-1 erfolgt durch Faktorisierung von B_i. Punkt i liegt genau im Origo des Koordinatensystems. Die Lage der anderen Punkte $j \neq i$ ergibt sich aus der Matrix X_i mit den Elementen x_{jt} (t=1,2,...,r). Der Koordinatenwert des j-ten Punktes in der t-ten Dimension ergibt sich aus folgender Beziehung.

$$(5\text{-}21) \quad B_{i\ (n-1,\ n-1)} = X_{i\ (n-1,r)} \cdot X'_{i\ (n-1,r)}$$

B_i muß also derart faktorisiert werden, daß eine rechteckige Matrix X_i erhalten wird, deren Produkt mit der transponierten

---

1 Zur weiteren Begründung vgl. HOLTMANN, D.: Multidimensionale Skalierung, Methode und ihre Anwendung in den Sozialwissenschaften, a.a.O., S. 157 ff.

Matrix X_i' wieder B_i ergibt. Die Elemente der Matrix X_i, d.h. die Koordinatenwerte der Punkte, sind nicht eindeutig festgelegt. Daher kann die Quantifizierung von X_i verschiedene Ergebnisse haben, die sich aber nur durch eine orthogonale Rotation unterscheiden. Für unterschiedliche i ergeben sich unterschiedliche X_i, und zwar durch eine Nullpunktverschiebung des Koordinatenursprungs in den Punkt i[1].

Der hier dargestellte Algorithmus für die metrische mehrdimensionale Skalierung wirft bei praktischer Anwendung einige Probleme auf[2]. Die Schwierigkeiten ergeben sich aus den unterstellten Voraussetzungen. So ist z.B. die Erstellung psychographischer Marktdaten auf dem geforderten intervall- oder verhältnisskalierten Niveau häufig sehr schwierig und teilweise unmöglich. Weiterhin ist fraglich, ob zwischen den Ähnlichkeitswerten der Inputmatrix und den reproduzierten Distanzen grundsätzlich eine lineare Beziehung unterstellt werden kann. Dieser Nachteil ist allerdings deshalb nicht so schwerwiegend, weil bei

---

1 Es werden hier fehlerfreie Distanzen d_{ij} unterstellt, d.h. es wird vorausgesetzt, daß mit Hilfe der Datengenerierungsverfahren und der sich anschließenden Schätzung der additiven Konstanten exakt der richtige Abstand der Punkte im Wahrnehmungsraum ermittelt werden kann. Bei der praktischen Anwendung muß man allerdings in der Regel von fehlerbehafteten Distanzen ausgehen. Deshalb ist man bemüht, den Versuchsfehler möglichst auszugleichen. Dazu wird der Ursprung des Koordinatensystems in den Schwerpunkt der Punktwolke verlegt, denn eine von Versuchsfehlern herrührende Fehllokalisation des Ursprungs würde alle Projektionen der Punkte auf die Achsen belasten. Es wird daher vorgeschlagen, eine zentrierte n x n Matrix B^{++} der Skalarprodukte zu berechnen.

$$B^{++}_{(n,n)} = X^{++}_{(n,r)} \cdot X'^{++}_{(n,r)}$$

SIXTL, F. und WENDER, K.: Der Zusammenhang zwischen multidimensionaler Skalierung und Faktorenanalyse, a.a.O.,S.252; TORGERSON, W.S.: Multidimensional scaling I. Theory and method, a.a.O., S. 410 ff. Andere Autoren empfehlen dann ein spezielles 'iteratives' metrisches Verfahren. HOLTMANN, D.: Multidimensionale Skalierung, Methode und ihre Anwendung in den Sozialwissenschaften, a.a.O., S. 26 ff.

2 COXON, A.P.M.: The development and extensions of multidimensional scaling models, unveröffentlichtes Manuskript, University of Edinburgh, o. Zeitangabe, S. 1-22, hier S. 3.

Einhaltung der Monotonie u.U. trotzdem relativ gute Resultate erzielt werden können[1]. Ein weiteres Problem ist, daß die Vpn häufig nicht gemäß einer Euklidischen Metrik urteilen. In einem solchen Fall müssen spezielle Verfahren wie z.B. das ATTNEAVE-Modell angewandt werden[2]. Man muß nämlich bedenken, daß eine Überprüfung der euklidischen Hypothese nicht möglich ist[3], da die Art der Schätzung der additiven Konstanten immer gewährleistet, daß Punktepositionen in einem euklidischen Raum abgeleitet werden können. Das kann auch im Fall nichteuklidischer Ähnlichkeitsrelationen dadurch erreicht werden, daß die additive Konstante genügend groß gewählt wird. Hinweise für derartige nichteuklidische Ähnlichkeitsbeziehungen sind neben einer relativ großen additiven Konstanten auch noch ein Konfigurationsraum mit annähernd n-1 Dimensionen. Insbesondere dann, wenn ein jeweils annähernd gleicher Abstand zwischen allen Punktepaaren zum Vorschein kommt, sollte man die MMDS-Lösung nicht überinterpretieren.

Trotz dieser Schwierigkeiten werden die MMDS-Verfahren heute noch häufig eingesetzt. So wird zur Berechnung von Startkonfigurationen für die iterativen nichtmetrischen mehrdimensionalen Skalierungen häufig auf das TORGERSON-Verfahren zurückgegriffen[4], da sich dann die Anzahl der Iterationsschritte zum Auffinden der Optimalkonfiguration gegenüber willkürlichen Startkonfigurationen erheblich vermindert. Außerdem werden die MMDS-Verfahren für Kontrollzwecke herangezogen. Dabei vergleicht man die MMDS-Konfiguration mit denjenigen, die mit Hilfe anderer moderner mehrdimensionaler Skalierungen gefunden worden sind. Insofern nimmt die Bedeutung der MMDS in letzter Zeit wieder zu.

---

1 GREEN, P.E.: On the robustness of multidimensional scaling techniques, in JoMR, Vol. XII (Febr. 1975), S. 73-81, hier S. 78 ff.

2 SHEPARD, R.N.: Attention and the metric structure of the stimulus, a.a.O., S. 54-87.

3 AHRENS, H.J.: Multidimensionale Skalierung, a.a.O., S.106 f.

4 Vgl. Abschnitt 6.2 dieser Arbeit.

5.4 Ein hypothetisches Beispiel zur MMDS

Die Leistungsfähigkeit der MMDS soll anhand eines konstruierten Beispiels gezeigt werden. Dabei wird die zu berechnende Konfiguration als bekannt vorausgesetzt, um eine Überprüfung des Ergebnisses zu ermöglichen. Es soll gezeigt werden, daß nur durch Angabe der komparativen Distanzen exakt die richtige Konfiguration der Punkte wiedergefunden wird.

Die Marketingabteilung eines Waschmittelherstellers ist im Rahmen einer Analyse der Konkurrenzsituation daran interessiert, die Position des Firmenprodukts [1] und seine Beziehung zu den Konkurrenzprodukten [2], [3] und [4] näher zu untersuchen. Es wird davon ausgegangen, daß Produkte, die im Raum nah zusammenliegen, eine wesentlich höhere Konkurrenzintensität besitzen als solche, die weiter voneinander entfernt sind. In diesem Beispiel gilt die Konfiguration aus Abb. 9.

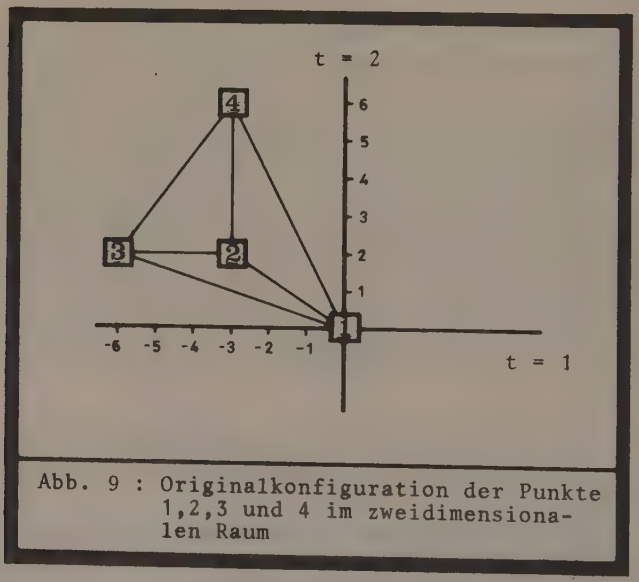


Abb. 9 : Originalkonfiguration der Punkte 1,2,3 und 4 im zweidimensionalen Raum

Für die n=4 Punkte i=1,2,3 und 4 gelten somit folgende Koordinatenwerte:

Originalkoordinatenwerte	
Punkt i	(Dim 1/Dim 2)
1	(0/0)
2	(-3/2)
3	(-6/2)
4	(-3/6)

Die Euklidischen Abstände zwischen den Punkten werden in der Matrix D dargestellt.

$$D_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0 & 3,61 & 6,33 & 6,71 \\ 3,61 & 0 & 3,00 & 4,00 \\ 6,33 & 3,00 & 0 & 5,00 \\ 6,71 & 4,00 & 5,00 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Schritt der hypothetischen Untersuchung:[1] Ermittlung der komparativen Distanzen.

Die Datenerhebung erfolgt mit bipolaren Ratingskalen[2]: Zur Quantifizierung der Unähnlichkeit wird eine 5-wertige Skala mit den Extremwerten '1' = sehr ähnlich und '5' = sehr unähnlich einer repräsentativen Zahl n_g von Hausfrauen vorge-

---

1 Dieses Beispiel mußte sehr einfach konstruiert werden, damit die einzelnen Matrizenoperationen möglichst nachvollziehbar waren. Es wurde aus Gründen der Genauigkeit mit acht Stellen nach dem Komma gerechnet. Um eine übersichtlichere Darstellung zu ermöglichen, sind hier nur zwei Stellen nach dem Komma aufgeführt. Etwaige Abweichungen sind auf Rundungsfehler zurückzuführen.

2 GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Rating scales and information recovery - How many scales and response categories to use?, in: JoM, Vol. 34 (July 1970),S. 33-39.

gelegt. Für n = 4 Produkte ergeben sich somit $n(n-1)/2 = 6$ Produktpaare, die jede Hausfrau g ($g = 1,2,\ldots,n_g$) beurteilen soll. Durch Ankreuzen lassen sich die Unähnlichkeitsurteile $\bar{e}_{ijg}$ der Vp g für das Produktpaar (i,j) angeben. Vp g = 1 habe folgendermaßen geurteilt:

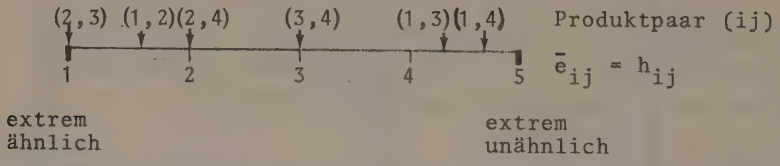
Produktpaar (i,j)	Ratingskala 1 – 2 – 3 – 4 – 5
1,2	X
1,3	X
1,4	X
2,3	X
2,4	X
3,4	X

$\bar{e}_{ijg}$

Anschließend wird durch Mittelwertbildung aus den Einzelergebnissen $\bar{e}_{ijg}$ der Durchschnittswert $\bar{e}_{ij}$ für jedes Produktpaar errechnet.

$$\bar{e}_{ij} = \frac{1}{n_g} \sum_{g} \bar{e}_{ijg}$$

Angenommen, es habe sich für die Paarkombinationen der Produkte folgendes Ergebnis eingestellt:



Die Durchschnittswerte $\bar{e}_{ij}$ werden als komparative Distanzen h_{ij} interpretiert, und es läßt sich Matrix H aufstellen:

$$H_{(4,4)} = \left[h_{ij}\right]_{(4,4)}$$

$$H_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0 & 1,61 & 4,33 & 4,71 \\ 1,61 & 0 & 1,00 & 2,00 \\ 4,33 & 1,00 & 0 & 3,00 \\ 4,71 & 2,00 & 3,00 & 0 \end{bmatrix}$$

Aus der Matrix H lassen sich die im späteren Verlauf der Rechnung noch benötigten Mittelwerte ermitteln. Auf Grund der Symmetrie von H gilt dabei stets $\bar{h}_{i.} = \bar{h}_{.j}$ für i = j.

i = j	$h_{i.} = h_{.j}$	$\bar{h}_{i.} = \bar{h}_{.j}$
1	10,64	2,66
2	4,60	1,15
3	8,33	2,08
4	9,71	2,43
	$h_{..}$ = 33,28	$\bar{h}_{..}$ = 2,08

2. Schritt: Schätzung der additiven Konstanten[1]

Zunächst muß die Matrix H^+ berechnet werden (vgl. Formel (5-7)).

$$H^+_{(4,4)} = \left[h^2_{ij}\right]_{(4,4)}$$

$$H^+_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0 & 2,58 & 18,71 & 22,17 \\ 2,58 & 0 & 1,00 & 4,00 \\ 18,71 & 1,00 & 0 & 9,00 \\ 22,17 & 4,00 & 9,00 & 0 \end{bmatrix}$$

Daraus ergeben sich die Mittelwerte der quadrierten komparativen Distanzen:

i = j	$h^2_{i.} = h^2_{.j}$	$\bar{h}^2_{i.} = \bar{h}^2_{.j}$
1	43,45	10,86
2	7,58	1,90
3	28,71	7,18
4	35,17	8,79
	$h^2_{..}$ = 114,90	$\bar{h}^2_{..}$ = 7,18

Zur Berechnung der Matrix B^+ müssen zunächst die symmetrischen Matrizen U, W und V ermittelt werden.

---

1 Das Beispiel wurde mit einem selbsterstellten Programm zur Berechnung der additiven Konstanten durchgerechnet.

Berechnung der Matrix U (vgl. Formel (5-9)).

$$U_{(4,4)} = \left[u_{ij} \right]_{(4,4)}$$

$$u_{ij} = 1/2 \, (\bar{h}^2_{.j} + \bar{h}^2_{i.} - \bar{h}^2_{..} - h^2_{ij})$$

$$U_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 7,27 & 1,50 & -3,92 & -4,85 \\ 1,50 & -1,70 & 0,45 & -0,25 \\ -3,92 & 0,45 & 3,59 & -0,11 \\ -4,85 & -0,25 & -0,11 & 5,20 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Matrix W (vgl. Formel (5-10)).

$$W_{(4,4)} = \left[w_{ij} \right]_{(4,4)}$$

$$w_{ij} = (\bar{h}_{i.} + \bar{h}_{.j} - \bar{h}_{..} - h_{ij})$$

$$W_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 3,24 & 0,13 & -1,66 & -1,70 \\ 0,13 & 0,22 & 0,15 & -0,50 \\ -1,66 & 0,15 & 2,08 & -0,57 \\ -1,70 & -0,50 & -0,57 & 2,77 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Matrix V (vgl. Formel(5-11)).

$$V_{(4,4)} = \left[v_{ij} \right]_{(4,4)}$$

$$v_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{n} = -\frac{1}{4} & \text{für } i \neq j \\ (1 - \frac{1}{n}) = \frac{3}{4} & \text{für } i = j \end{cases}$$

$$V_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,25 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & 0,75 & -0,25 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & 0,75 & -0,25 \\ -0,25 & -0,25 & -0,25 & 0,75 \end{bmatrix}$$

Einführung des Versuchswertes $\hat{c}$ für die additive Konstante c.

$$\hat{c} = 4$$

Die Berechnung der Matrix B^+ ergibt sich als (vgl. Formel (5-8)):

$$B^+_{(4,4)} = U_{(4,4)} + \hat{c} \, W_{(4,4)} + 1/2 \, \hat{c}^2 \, V_{(4,4)}$$

$$B^{+}_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 26,23 & 0 & -12,58 & -13,65 \\ 0 & 5,20 & -0,94 & -4,25 \\ -12,58 & -0,94 & 17,92 & -4,39 \\ -13,65 & -4,25 & -4,39 & 22,30 \end{bmatrix}$$

Aus der Matrix B^{+} ergeben sich drei von 0 verschiedene Eigenwerte.

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 40,66 & \beta_1 - \beta_2 &= 16,07 \\ \beta_2 &= 24,59 & \beta_2 - \beta_3 &= 18,20 \ (!) \\ \beta_3 &= 6,39 & \beta_3 - \beta_4 &= 6,39 \\ \beta_4 &= 0,00 \end{aligned}$$

Festlegung von r': Durch die Überschätzung von c ($c = 2$; $\hat{c} = 4$) ist der Rang der Matrix B^{+} vergrößert worden. Da nach den beiden ersten Eigenwerten β_1 und β_2 aber ein auffallender Werteabfall von 18,20 festgestellt werden kann, ist

$$r' = 2 \ .$$

Es werden nun die entsprechenden Eigenvektoren $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ bzw. $\vec{a}'_1$ und $\vec{a}'_2$ benötigt.

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 0,78 \\ 0,07 \\ -0,34 \\ -0,52 \end{bmatrix} \qquad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 0,15 \\ -0,11 \\ -0,71 \\ 0,68 \end{bmatrix}$$

Aufstellen der quadratischen Gleichung gemäß Formel (5-15) bzw. (5-16).

$$a_{11} + a_{12}\,\hat{c} + a_{13}\,\hat{c}^2 = a_{21} + a_{22}\,\hat{c} + a_{23}\,\hat{c}^2$$

$$a_{11} = \frac{n}{2}\,\bar{h}^2_{\cdot\cdot} = 14,36$$

$$a_{12} = n\,\bar{h}_{\cdot\cdot} = 8,32$$

$$a_{13} = 1/2(n-1) = 1,50$$

$$a_{21} = \vec{a}_1' \, U \, \vec{a}_1 + \vec{a}_2' \, U \, \vec{a}_2 = 16{,}74$$
$$a_{22} = \vec{a}_1' \, W \, \vec{a}_1 + \vec{a}_2' \, W \, \vec{a}_2 = 8{,}13$$
$$a_{23} = 1/2 \; r' = 1{,}0$$

Auflösung des quadratischen Gleichungssystems:

$$\hat{c}_{1,2} = \frac{a_{22} - a_{12}}{2(a_{13} - a_{23})} \pm \sqrt{\left[\frac{a_{22} - a_{12}}{2(a_{13} - a_{23})}\right]^2 - \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{13} - a_{23}}}$$

$$\hat{c}_1 = 1{,}997$$
$$\hat{c}_2 = -2{,}377$$

Einsetzen von $\hat{c}_1$ bzw. $\hat{c}_2$ in die Gleichung (5-16) gemäß (5-17).

$$\sum \beta_t(\hat{c}) = \sum \vec{a}_t' \, U \, \vec{a}_t + \hat{c} \sum \vec{a}_t' \, W \, \vec{a}_t + 1/2 \; r' \; \hat{c}^2$$
$$\sum \beta_t(\hat{c}_1) = 16{,}74 + 1{,}997 \cdot 8{,}13 + 1 \cdot 3{,}988 = 36{,}96$$
$$\sum \beta_t(\hat{c}_2) = 16{,}74 - 2{,}377 \cdot 8{,}13 + 1 \cdot 5{,}650 = 3{,}06$$
$$\sum \beta_t(\hat{c}_{opt}) = \max \left\{ \sum \beta_t(\hat{c}_1) \; ; \sum \beta_t(\hat{c}_2) \right\} = \sum \beta_t(\hat{c}_1)$$
$$\hat{c}_{opt} = \hat{c}_1 = 1{,}997$$

Da dem Verfasser das Ergebnis vorab bekannt war und der exakte Wert für die additive Konstante c = 2 betragen muß, ist der ermittelte Schätzwert $\hat{c}_{opt} = 1{,}997$ eine sehr gute Annäherung[1].

---

1 Für das Beispiel wurde die Wirkung einer Über- und Unterschätzung der additiven Konstanten auf $\hat{c}_{opt}$ untersucht. Dabei ergaben sich folgende Resultate:

	Versuchswert $\hat{c}$	Rang r'	$\hat{c}_{opt}$
Unterschätzung	0,5	1	-0,8118
exakte Schätzung	2,0	2	1,9998
Überschätzung	4,0	2	1,9973

Beim Vergleich von $\hat{c}_{opt}$ mit dem 'exakten' c fällt auf, daß eine Überschätzung nicht so schwerwiegende Auswirkungen wie eine Unterschätzung hat.

Es läßt sich nun eine n x n Matrix D verhältnisskalierter Distanzen aufstellen (vgl. Formel (5-18)).

$$D_{(4,4)} = \left[d_{ij} \right]_{(4,4)}$$

$$d_{ij} = h_{ij} + c_{opt}(1 - \delta^{ij})$$

$$D_{(4,4)} = \begin{bmatrix} 0 & 3{,}61 & 6{,}33 & 6{,}71 \\ 3{,}61 & 0 & 3{,}00 & 4{,}00 \\ 6{,}33 & 3{,}00 & 0 & 5{,}00 \\ 6{,}71 & 4{,}00 & 5{,}00 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Schritt: Die Determinierung der Dimensionenzahl und der Koordinatenwerte

Zunächst muß für den Punkt 1 die Matrix der Skalarprodukte B_1 berechnet werden. Da die erste Zeile und Spalte fehlt, ergibt sich eine 3 x 3 Matrix.

$$B_{1\ (3,3)} = \left[b_{jk} \right]_{(3,3)} \quad ; \quad j,k \neq 1$$

$$b_{jk} = 1/2\ (d_{ij}^2 + d_{ik}^2 - d_{jk}^2)$$

$$B_{1\ (3,3)} = \begin{bmatrix} 13 & 25 & 21 \\ 25 & 40 & 30 \\ 21 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

Es muß nun überprüft werden, ob B_1 positiv semidefinit ist. Dazu müssen die Hauptabschnittsdeterminanten der Matrix B_1 berechnet werden.

$$\left| b_{22} \right| = \left| 13 \right| = 13$$

$$\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 25 \\ 25 & 40 \end{vmatrix} = -105$$

Da eine Hauptabschnittsdeterminante negativ ist, liegt keine positiv semidefinite Matrix vor. Es muß $B_{i+1} = B_2$ berechnet werden.

$$B_{2\ (3,3)} = \begin{bmatrix} 13 & -9 & -8 \\ -9 & 9 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

Es folgt die Berechnung der Hauptabschnittsdeterminanten der Matrix B_2.

$$\left|b_{11}\right| = \left|13\right| = 13$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -9 \\ -9 & 9 \end{vmatrix} = 36$$

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} & b_{14} \\ b_{31} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & -9 & -8 \\ -9 & 9 & 0 \\ -8 & 0 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Da eine Hauptabschnittsdeterminante gleich 0 und alle anderen nicht negativ sind, ist B_2 eine positiv semidefinite Matrix. Der Rang r_2 der Matrix B_2 kennzeichnet die zugrundeliegende Dimensionenzahl der Konfiguration.

$$r_2 = 2$$

Um die Koordinatenwerte bestimmen zu können, muß B_2 derart faktorisiert werden, daß die Konfigurationsmatrix X_2 multipliziert mit der transponierten X_2' wieder B_2 ergibt (vgl. Formel (5-21)).

$$B_{2\ (3,3)} = X_{2\ (3,2)} \cdot X'_{2\ (3,2)}$$

Ein mögliches Ergebnis wäre z.B.:

$$X_2 = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Das Koordinatenorigo liegt im Punkt 2, daher fehlt der Matrix X_2 die zweite Zeile und Spalte. Die Koordinatenwerte für die anderen Punkte j = 1,3 und 4 in der Dimension t ergeben sich aus den Elementen x_{jt} von X_2.

In Abb. 10 sind die Positionen für die vier Punkte im zweidimensionalen Raum dargestellt.

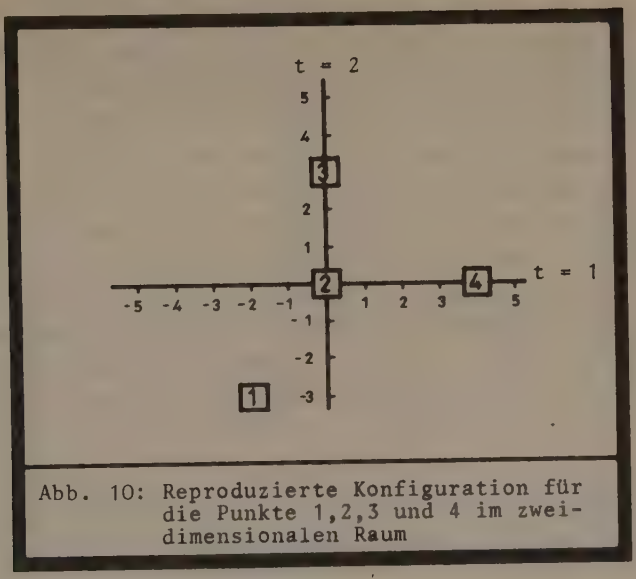


Abb. 10: Reproduzierte Konfiguration für die Punkte 1,2,3 und 4 im zweidimensionalen Raum

Beim Vergleich der reproduzierten (Abb.10) mit der Originalkonfiguration (Abb. 9) fällt auf, daß die Konfiguration unverändert ist. Wie man leicht sieht, handelt es sich bei dem Ergebnis der MMDS um 90° rotierte und nullpunkttransformierte Koordinatenwerte. Dieses Phänomen kann bei allen MDS-Verfahren beobachtet werden. Nur durch Kenntnis der komparativen bzw. absoluten Distanzen ist eine exakte Reproduktion der Konfiguration gelungen. Durch zusätzliches problemspezifisches Wissen sind die Koordinatenwerte nun so zu rotieren, bis man ein interpretierbares Ergebnis erhält. In bezug auf das firmeneigene Produkt 1 liegt das Konkurrenzprodukt 2 am nächsten. Produkt 2 ist also als schärfster Konkurrent anzusehen, da die Konsumenten einen relativ gleichartigen Eindruck von der Marke 2 und der Marke 1 besitzen. Dieses Ergebnis

hätte man bereits der Ausgangsmatrix H entnehmen können. Der Vorteil der Darstellung der Objekte in Form einer Punktekonfiguration liegt aber darin, daß man die Achsen des Koordinatensystems u.U. inhaltlich interpretieren und somit die Vorstellungen der Konsumenten besser analysieren kann. Außerdem besteht die Möglichkeit, bestimmte Hypothesen über die räumliche Struktur des Marktes mit Hilfe der MMDS testen zu können.

6 DIE NICHTMETRISCHE MEHRDIMENSIONALE SKALIERUNG (NMDS)

6.1 Grundgedanken der NMDS

Die NMDS ist gekennzeichnet durch einen 'nichtmetrischen', oder genauer gesagt ordinalskalierten Input und die Verarbeitung dieses Inputs zu einem metrischen Output, der aus einer Punktekonfiguration im metrischen mehrdimensionalen Raum besteht. Der eigentliche innovatorische Anstoß zur Extraktion metrischer Informationen aus ordinalem Input erfolgte im Jahre 1964 von SHEPARD[1] und KRUSKAL[2]. Weitere Entwicklungen, die sich auf unterschiedliche Datentypen des Inputs und Modifikationen des Algorithmus bezogen, wurden beispielsweise von GUTTMAN[3], LINGOES[4], McGEE[5], TORGERSON[6] und YOUNG[7] erarbeitet. Da diese Weiterentwicklungen sich

---

1 SHEPARD, R.N.: The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function, I, in: Psychometrika, Vol. 27 (1962), S. 125-140; SHEPARD, R.N.: The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function, II, a.a.O., S. 219-246.

2 KRUSKAL, J.B.: Nonmetric multidimensional scaling: A numerical method, a.a.O., S. 115-129; KRUSKAL, J.B.: Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis, a.a.O., S. 1-28.

3 GUTTMAN, L.A.: A general nonmetric technique for finding the smallest coordinate space for a configuration of points, in: Psychometrika, Vol. 33 (1968), S. 469-506.

4 LINGOES, J.C.: A general survey of the GUTTMAN-LINGOES nonmetric program series, in: SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B. (Hrsg.): Multidimensional scaling, Vol. I, Theory, New York und London 1972, S. 49-68.

5 McGEE, V.E.: Multidimensional scaling of N sets of similarity measures: A nonmetric individual differences approach, in: Multivariate Behavioral Research, Vol.3 (1968), S.233-248.

6 TORGERSON, W.S.: Multidimensional scaling of similarity, in: Psychometrika, Vol. 30 (1965), S. 379-393.

7 YOUNG, F.W.: A model for polynomial conjoint analysis algorithms, in: SHEPARD, R.W., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B. (Hrsg.): Multidimensional scaling, Vol. I, Theory, New York und London 1972, S. 69-104.

teilweise nur geringfügig voneinander unterscheiden und in ihren Grundgedanken auf der Pionierarbeit von SHEPARD und KRUSKAL beruhen, erscheint es gerechtfertigt, hauptsächlich diese beiden Algorithmen zu beschreiben.

Häufig werden bei Marketinguntersuchungen nur Ähnlichkeitsdaten auf rangskaliertem Niveau produziert. Insbesondere dann, wenn Verwechslungshäufigkeiten[1] der einzelnen Objekte oder Assoziationsdaten als Ähnlichkeitsmaß interpretiert werden, sind nur ordinale Aussagen über die einzelnen Objektpaare möglich. Deshalb sichern die im Vergleich zu den metrischen Verfahren weniger strengen Anforderungen an den Input den MDS-Verfahren eine weite Verbreitung. In verschiedenen Studien wurde der NMDS-Algorithmus zum Beispiel zur Positionierung von Diätprodukten, Zeitschriften[2], Dienstleistungen des Bankensektors[3], zur Marktsegmentierung[4], zur Quantifizierung von Produktqualitäten[5], zur Imageanalyse von Politikern[6] und zur Darstellung potentieller Marketinganwendungsmöglichkeiten heran-

---

1 GREEN, P.E., CARMONE, F.J. und ROBINSON, P.J.: A comparison of perceptual mapping via confusions data and direct similarity judgements, in: KING, R.L. (Hrsg.): Proceedings of the Denver Conference of the American Marketing Association, Chicago 1968, S. 323-334.

2 DILLER, H. und SCHOBERT, R.: Räumliche Repräsentation durch nicht-metrische mehrdimensionale Skalierung, in: Jahrbuch der Absatz- und Verbrauchsforschung, Heft 4, 19. Jg. (1973), S. 297-310; vgl. Abschnitt 9.2. dieser Arbeit.

3 WIND, Y. und ROBINSON, P.J.: Product positioning: An application of multidimensional scaling, Paper prepared for the fourth Attitude Research Conference of the American Marketing Association, St. Thomas, October 30, 1971, S.1-19.

4 DOEHLERT, D.H.: Similarity and preference mapping: A color example, in: AAKER, D.A. (Hrsg.): Multivariate analysis in marketing, theory and application, Belmont 1971, S.290-298.

5 FAUMAN, B.C.: The semantics of product quality. A multidimensional scaling, approach, in: Working Papier Series Nr.7405, University of Rochester, revised (March 1974), S. 1-15.

6 RABINOWITZ, G.B.: An introduction to nonmetric multidimensional scaling, in: American Journal of Political Science, Vol. XIX (May 1975), S. 343-390.

gezogen[1]. Dabei stellen die Objekte (Punkte) meist Produkte und/oder Vpn dar, und die Dimensionen des Raumes dienen der Analyse der signifikanten Charakteristika (Eigenschaften) der Objekte .

Der scheinbar paradoxe Versuch, metrische Informationen aus nichtmetrischen Daten zu gewinnen, beruht dabei auf folgenden Überlegungen[2]. Es wird unterstellt, daß eine n x n Matrix S vorliegt, deren Elemente $\bar{e}_{ij}$ ordinalskalierte Unähnlichkeitswerte für jedes Objektpaar darstellen. Durch diese Inputmatrix sind bestimmte Rangordnungen für die Beziehungen zwischen den einzelnen Objektpaaren vorgegeben. Dieselbe Rangordnung soll aber auch zwischen den 'Interpunkt'-Distanzen des Outputs bestehen, d.h. es soll eine monotone Beziehung zwischen den Unähnlichkeitswerten $\bar{e}_{ij}$ und den Distanzen d_{ij} zwischen den einzelnen Punktpaaren (ij) vorliegen. Formal ausgedrückt bedeutet das, wenn i,j,k,l = 1,2,...,n Punkte (Objekte) sind:

$$\bar{e}_{ij} < \bar{e}_{kl} \longrightarrow d_{ij} \leq d_{kl}$$

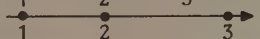
Diese von KRUSKAL vorgeschlagene (schwach) monotone Beziehung der Zuordnungsfunktion ergibt bei Einhaltung der Monotonie $\binom{n}{2}$ Restriktionen für die Distanzen. Bei geringer Anzahl n von Objekten ist somit auch nur eine geringe Anzahl von Ungleichungen vorhanden, und die Punkte können relativ weit verschoben werden, ohne eine Nebenbedingung zu verletzen.

---

1 GREEN, P.E.: Marketing applications of MDS: Assesment and outlook, working paper, University of Pennsylvania, revised (July 1974), S. 1-25; GREENBERG, M.G.: Some applications of nonmetric multidimensional scaling, in: Proceedings of the 129th Annual Meeting of the American Statistical Association (1969), S. 104-109; GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Marketing research applications of non-metric scaling methods, a.a.O., S. 73-96.

2 Vgl. SHEPARD, R.N.: Metric structures in ordinal data, in: Journal of Mathematical Psychology, Vol. 3 (1966), S.287-315, hier S. 288 f.

Zur Verdeutlichung dieser Gedankengänge diene ein Beispiel mit $n = 3$ Punkten in einer Dimension ($r = 1$), welches analog für den mehrdimensionalen Fall konstruiert werden könnte. Angenommen, es gilt $\bar{e}_{12} < \bar{e}_{23} < \bar{e}_{13}$, so folgt daraus für die Distanzen die Rangordnung $d_{12} \leqq d_{23} \leqq d_{13}$. Es sollen hier für diese Rangordnung drei mögliche Lösungen (a,b und c) dargestellt werden.

Fall	Punkteanordnung	Rangordnung der Distanzen
a		$d_{12} \leqq d_{23} \leqq d_{13}$
b		"
c		"

In allen drei Fällen wird die Monotoniebedingung eingehalten. Mit zunehmendem n nimmt die Anzahl der Restriktionen aber fast quadratisch zu, und somit wird die Verschiebemöglichkeit immer geringer. Für die praktische Anwendung ist bei genügend großem n ($n \geq 10$) die Kenntnis der Rangordnung der Distanzen fast genau so informativ wie die metrische Distanzangabe.

Meist kann aber die Monotoniebedingung nur eingehalten werden, wenn die Darstellung in einem mehrdimensionalen Raum erfolgt, aber auch dann werden die Verschiebemöglichkeiten der Punkte und die damit verbundenen Distanzänderungen immer mehr eingeengt. Angenommen, für 3 Punkte ergibt sich aus der Inputmatrix die Distanzrelation

$$d_{ij} = d_{jk} > d_{ik} ,$$

so läßt sich diese Ordnungsrelation nicht auf einem Fahrstrahl abbilden. Eine Darstellung dieser Rangordnung der Distanzen ist nur im zweidimensionalen Raum möglich, wie Abb. 11 verdeutlicht.

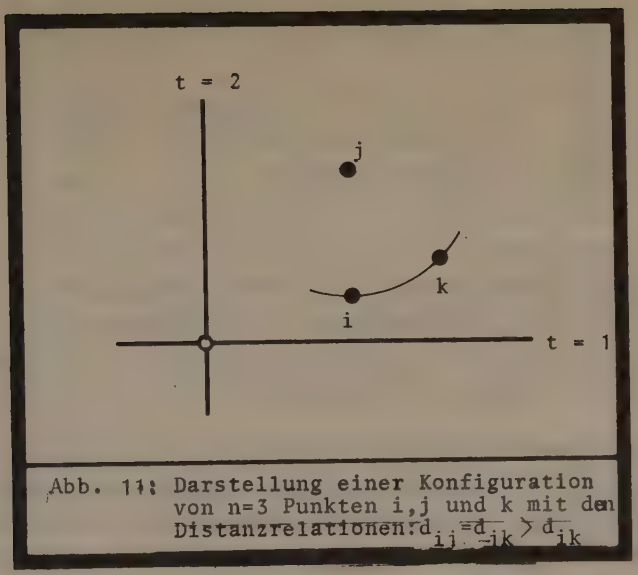


Abb. 11: Darstellung einer Konfiguration von n=3 Punkten i,j und k mit den Distanzrelationen: $d_{ij} = d_{jk} > d_{ik}$

Für n Punkte gibt es immer eine triviale Lösung im (n - 1)-dimensionalen Raum.

Die Z i e l s e t z u n g der NMDS ist,für n Objekte in einem Raum von möglichst geringer Dimensionalität mittels Iteration eine Konfiguration von n Punkten zu finden. Dabei sollen die entsprechenden Interpunktdistanzen mit hinreichender Genauigkeit den Ordnungsrelationen der ordinalskalierten Elemente der Inputmatrix entsprechen. Der Grad der Einhaltung der Monotonie wird mit Hilfe eines Anpassungsmaßes zu definieren sein. Die Anpassungsgüte steigt mit zunehmender Dimensionenzahl des Raumes, in den die Konfiguration der Punkte gelegt werden soll. Der Anwender muß eine Kompromißentscheidung zwischen minimaler Dimensionalität und optimaler Anpassungsgüte fällen. Meist wird die nichtmetrische mehrdimensionale Skalierung deshalb für alternative Dimensionenzahlen berechnet. Im folgenden

soll davon ausgegangen werden, daß die Dimensionenzahl r vor Beginn der Rechnung vom Anwender bereits festgelegt ist[1].

Im wesentlichen läßt sich das von SHEPARD und KRUSKAL formulierte Iterationsverfahren zur Bewältigung der obengenannten Zielsetzung in 10 Schritte unterteilen.

1. Schritt: Ausgangspunkt ist eine symmetrische n x n Matrix S, deren Elemente ordinalskalierte Unähnlichkeitswerte $\bar{e}_{ij}$ für alle Objektpaare (i,j) darstellen.

$$S = \left[\bar{e}_{ij}\right] \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

Die Vpn werden gebeten, den $\binom{n}{2}$ Objektpaaren Rangziffern $\bar{e}_{ij}$ hinsichtlich des komplexen Merkmals Unähnlichkeit zuzuordnen. Die Quantifizierung der $\bar{e}_{ij}$ kann durch unterschiedliche Datengenerierungsverfahren erfolgen. Als bekannteste seien hier genannt: Der Triadenvergleich, die Ankerreizmethode und die Rangordnung von Paaren. Diese Datenerhebungsmethoden unterscheiden sich aber hinsichtlich des Zeitaufwandes und der Vpn-Belastung[2].

2. Schritt: Aus der Matrix S wird durch alternative Verfahren eine n x r Ausgangskonfigurationsmatrix X^o erstellt.

$$X^o = \left[x^o_{it}\right] \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,n \\ t = 1,2,\ldots,r \end{matrix}$$

Die Matrix X^o kennzeichnet durch ihre Elemente x^o_{it} die Koordinatenwerte der Punkte i in allen Dimensionen t.

---

1 Vgl. Abschnitt 8.3 dieser Arbeit.

2 Vgl. Abschnitt 8.2 dieser Arbeit.

3. Schritt: Der 3. Schritt initialisiert einen Iterationsprozeß (3.-9. Schritt) und normiert die Konfiguration X. Die Normierung geschieht in der Weise, daß das Origo mit dem Schwerpunkt der Punktwolke übereinstimmt und die Achsen gemäß der Streuung der Punkte in jeder Dimension gestaucht bzw. gestreckt werden, da sich durch dieses auch als Standardisierung bezeichnete Vorgehen erhebliche Rechenvereinfachungen ergeben.

4. Schritt: Jede normierte Konfiguration erlaubt mittels einer Distanzfunktion[1] $_{p}d_{ij}$ die Ermittlung der Distanzen d_{ij} zwischen den den Objektpaaren (i,j) zugeordneten Koordinatenwerten x_{it} und x_{jt}. Es ergibt sich eine n x n Matrix D.

$$D = \left[d_{ij} \right] \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

5. Schritt: Die Einhaltung der Monotoniebedingung erfolgt mittels Korrektur der Distanzen d_{ij} in angepaßte Werte $\hat{d}_{ij}$ (innere Iteration). Es muß eine n x n Matrix $\hat{D}$ aufgestellt werden.

$$\hat{D} = \left[\hat{d}_{ij} \right] \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

6. Schritt: Mit Hilfe von D und $\hat{D}$ wird ein Anpassungsmaß S (Stress) berechnet, welches überprüft, ob die Distanzen die gleichen Ordnungsrelationen aufweisen wie die Inputdaten und wie gut die Anpassung ist.

7. Schritt: Die Punkte der Konfiguration müssen nun so verschoben werden, daß die Anpassungsgüte verbessert wird. Der Stress muß also verringert werden. Deshalb wird festgestellt, in welcher Richtung die Stressfunktion am steilsten fällt. Außerdem wird eine Strecke entlang des Vektors des stärksten Abstiegs, die sog. Schrittweite, berechnet.

8. Schritt: Um den iterativen Anpassungsprozeß beenden zu können, werden mehrere Stoppregeln formuliert.

---

1 Vgl. Abschnitt 4.2 dieser Arbeit.

9. Schritt: Bei Entscheidung für die Fortsetzung der iterativen Prozedur wird eine neue verbesserte Konfiguration X mit den Koordinatenwerten x_{it}^{neu} ermittelt, und die Iteration beginnt von neuem mit Schritt 3 (äußere Iteration).

10. Schritt: Wenn die Abbruchregeln wirksam werden, wird die letzte Konfiguration der Iteration als die 'optimale' X^{opt} angesehen. Damit ist die nichtmetrische mehrdimensionale Skalierung beendet.

Diese Vorgehensweise der NMDS zur Berechnung einer Punktekonfiguration in einem festgelegten Raum läßt sich anschaulich zusätzlich an einem Flußdiagramm darstellen. Die Übersicht 8 verdeutlicht die Abfolge und die Verknüpfungen der einzelnen Schritte und zeigt den iterativen Charakter der nichtmetrischen mehrdimensionalen Skalierung.

6.2 Fixierung einer Ausgangskonfiguration und Normierung einer beliebigen Konfiguration

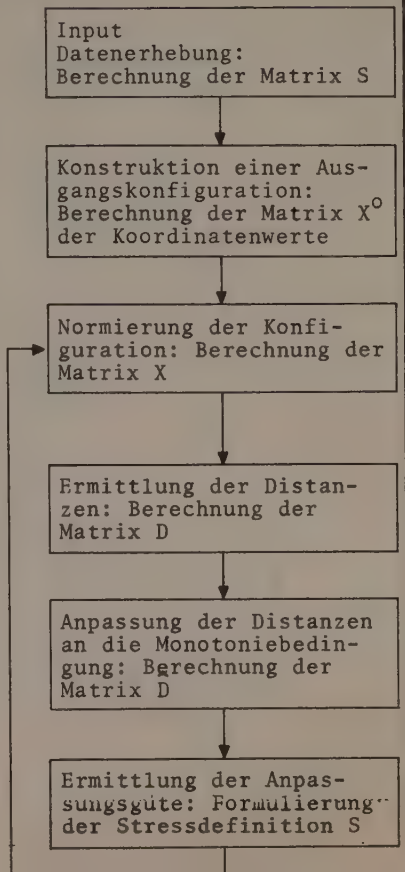
Da es sich bei der NMDS um ein iteratives Verfahren handelt, muß eine Startkonfiguration festgelegt werden, die sukzessiv verbessert werden kann. Vorher wird jedoch im ersten Schritt mittels einer geeigneten Datenerhebungsmethode eine Inputmatrix S aufgestellt. Auf Grund der Symmetrie dieser Matrix wird meist nur die Hälfte oberhalb oder unterhalb der Diagonale dargestellt.
So ergibt sich z.B. für n = 4 Objekte folgende Inputmatrix.

$$S = \left[\bar{e}_{ij}\right] \qquad i,j = 1,2,\ldots,n$$

$$S = \begin{bmatrix} - & 2 & 5 & 6 \\ & - & 1 & 3 \\ & & - & 4 \\ & & & - \end{bmatrix}$$

Daran anschließend wird der Iterationsprozeß im zweiten Schritt durch die Bestimmung einer S t a r t k o n f i g u r a t i o n

Schritt	Aufgabe	Symbolik	mögliche Methode
1.	Input Datenerhebung: Berechnung der Matrix S	$S = \left[\bar{e}_{ij}\right]$ $i = 1,2,\ldots,n$ $j = 1,2,\ldots,n$ (Objekte)	Triadenvergleich, Ankerreizmethode, Rangordnung von Paaren
2.	Konstruktion einer Ausgangskonfiguration: Berechnung der Matrix X^o der Koordinatenwerte	$X^o = \left[x^o_{it}\right]$ $i = 1,2,\ldots,n$ (Objekte) $t = 1,2,\ldots,r$ (Dimensionen)	willkürliche, zufällige, rationale Methode
3.	Normierung der Konfiguration: Berechnung der Matrix X	$X = \left[x_{it}\right]$ $i = 1,2,\ldots,n$ (Objekte) $t = 1,2,\ldots,r$ (Dimensionen)	Standardisierung der Konfiguration
4.	Ermittlung der Distanzen: Berechnung der Matrix D	$D = \left[d_{ij}\right]$ $i = 1,2,\ldots,n$ $j = 1,2,\ldots,n$ (Objekte)	City-Block-Metrik, Euklid-Metrik, Supremum-Metrik
5.	Anpassung der Distanzen an die Monotoniebedingung: Berechnung der Matrix D	$\hat{D} = \left[\hat{d}_{ij}\right]$ $i = 1,2,\ldots,n$ $j = 1,2,\ldots,n$ (Objekte)	schwach monotone, streng monotone Regression
6.	Ermittlung der Anpassungsgüte: Formulierung der Stressdefinition S	S_1 S_2	Stress 1 Stress 2



7.	Verschiebung der Punkte, so daß die Stressfunktion minimiert wird	S_1, $S_2 \rightarrow \min$	Gradientenmethode
8.	Einführung von Stoppregel(n)	$IT \leq IT_{max}$; $\alpha \approx 0$; $S_1 \leq S_c$;	Vorgabe von maximaler Iterationenzahl (IT_{max}), Schrittweite $\alpha \approx 0$; Anpassungsgüte zufriedenstellend
	Stopp-kriterium erreicht?		
	ja / nein		
9.	Berechnung einer verbesserten Konfiguration X	$X = \left[x_{it}^{neu}\right]$ $i = 1,2,\ldots,n$ (Objekte) $t = 1,2,\ldots,r$ (Dimensionen)	
10.	Ergebnis: Endkonfiguration X^{opt}	$X^{opt} = \left[x_{it}^{opt}\right]$ $i = 1,2,\ldots,n$ (Objekte) $t = 1,2,\ldots,r$ (Dimensionen)	

Übers. 8: Schematische Darstellung der Vorgehensweise bei der NMDS (Flußdiagramm)

(initial oder trial configuration) initialisiert. Formal geschieht dies durch die Bestimmung einer rechteckigen n x r Matrix X^o, deren Elemente x^o_{it} die Kordinatenwerte des Punktes i in der Dimension t darstellen.

$$X^o = \left[x^o_{it} \right] \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,n \\ t = 1,2,\ldots,r \end{matrix}$$

Diese Ausgangskonfiguration muß zwei Bedingungen erfüllen. Sie darf einerseits das gleiche Zahlentupel nicht zwei Punkten gleichzeitig zuordnen und andererseits darf die Ausgangskonfiguration nicht in einem niedriger dimensionierten Raum liegen, als vor Beginn der Rechnung festgelegt wurde. Grundsätzlich werden drei Vorgehensweisen zur Konstruktion einer Ausgangskonfiguration unterschieden. Man kann die Koordinatenwerte x^o_{it} (1) willkürlich mit Hilfe der Matrix X^o_a, (2) zufällig mit X^o_b oder (3) 'rational' mit X^o_c festlegen.

(1) Immer dann, wenn keine konkreten Vorstellungen über die ungefähre Lage der Punkte vorliegen, kann man die Position der Punkte zunächst w i l l k ü r l i c h bestimmen. KRUSKAL[1] schlägt vor, die Koordinatenwerte aus einer n x r Liste der folgenden Form mit r Spalten und n Zeilen zu entnehmen.

$$X^o_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ & & \ldots & & \end{bmatrix}$$

---

1 KRUSKAL, J.B.: Nonmetric multidimensional scaling: A numerical method., a.a.O., S. 120.

So ergibt sich z.B. für n = 4 Objekte 1,2,3 und 4 in einem festgelegten Raum von r = 2 Dimensionen Abb. 12.

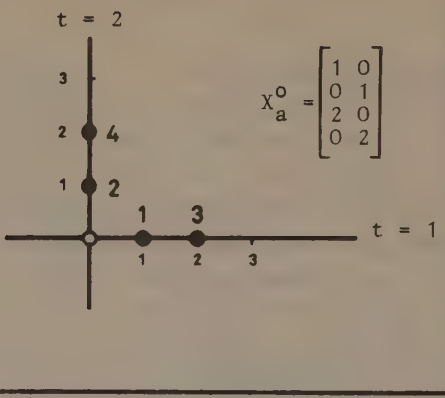


Abb. 12 : Darstellung einer willkürlichen Ausgangskonfiguration für n = 4 Objekte in r = 2 Dimensionen

Diese Methode ist allerdings relativ unbrauchbar, da sie keinerlei Informationen der Ordnungsrelationen der Inputmatrix S berücksichtigt. Eine derartige Ausgangskonfiguration ist daher in der Regel sehr weit von der Optimalkonfiguration entfernt und verursacht somit eine große Anzahl von Iterationen, bevor die Endkonfiguration gefunden werden kann. Lediglich zur Überprüfung der Optimalität einer Endkonfiguration hat eine willkürliche Startkonfiguration ihre Berechtigung. Es wird dann eine derartige X_a^o neben anderen X^o parallel angewandt. Führen auch andere Starts zu keiner Veränderung der Endkonfiguration, so kann dies als ein Hinweis für Optimalität interpretiert werden. Monte-Carlo-Untersuchungen haben gezeigt, daß willkürliche Startkonfigurationen die Endkonfiguration stärker beeinflussen als die noch zu erläuternden 'Rationalstarts'[1].

---

1 YOUNG, F.W.: A model for polynomical conjoint analysis algorithms, a.a.O., S. 93.

(2) Die Zufallsstartkonfiguration ist ebenfalls nur dann sinnvoll, wenn keine Informationen über die Struktur der Konfiguration vorliegen. Hierbei werden $m = n \times r$ Zufallszahlen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ aus einer Zufallszahlentabelle entnommen, die als Koordinatenwerte interpretiert werden und man erhält:

$$X_b^o = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_r \\ & & \cdots & \\ Z_{m-r} & & \cdots & Z_m \end{bmatrix}$$

So ergibt sich bei Verwendung von 3ziffrigen Werten aus einer Zufallszahlentabelle für 4 Objekte im zweidimensionalen Raum Abb.13.[1].

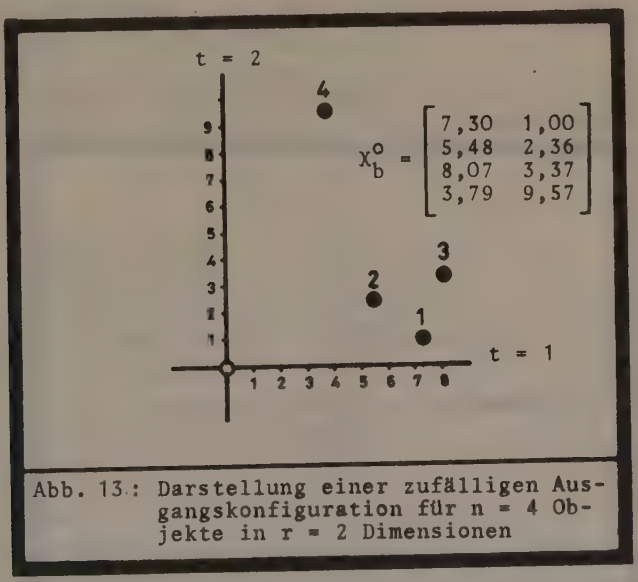


Abb. 13: Darstellung einer zufälligen Ausgangskonfiguration für n = 4 Objekte in r = 2 Dimensionen

1 Anm. d. Verf.: Hierbei muß allerdings festgestellt werden, daß grundsätzlich nicht die Zuordnung desselben Koordinatenwertes zu zwei oder mehreren Punkten verhindert wird, wie es für eine Ausgangskonfiguration gefordert wird. Da die Wahrscheinlichkeit dafür aber äußerst gering ist, soll dieser Aspekt vernachlässigt werden.

(3) Der bei weitem sinnvollste Weg zur Festlegung der ersten Konfiguration ist der eines 'r a t i o n a l e n' Starts. Hierbei werden Informationen der Inputmatrix $S = [\bar{e}_{ij}]$ berücksichtigt, wodurch sich die Anzahl der Anpassungsschritte u.U. erheblich verringert und die Gefahr des Erreichens eines Suboptimums eingedämmt wird. So können im Rahmen eines Rationalstarts die ordinalskalierten Unähnlichkeitswerte $\bar{e}_{ij}$ als intervallskalierte h_{ij} oder verhältnisskalierte Distanzen d_{ij} zwischen Objektpaaren interpretiert werden[1]. Geht man auf das TORGERSON-Verfahren zurück, so wäre z.B. die metrische mehrdimensionale Skalierung in der Lage, einen Rationalstart für die NMDS zu berechnen.

$$X_c^o = X^{++} = \left[x_{it} \right] \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,n \\ t = 1,2,\ldots,r \end{matrix}$$

So ergab sich z.B. mit Hilfe eines metrischen Programms[2] eine Initialkonfiguration, wie sie in Abb. 14 dargestellt ist.

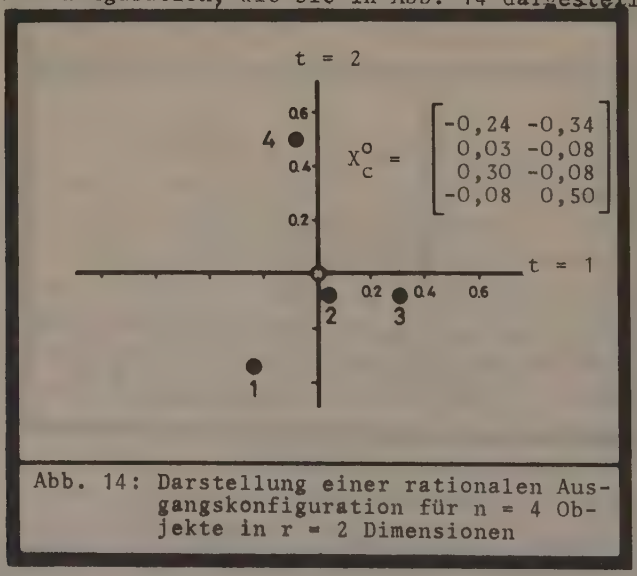


Abb. 14: Darstellung einer rationalen Ausgangskonfiguration für n = 4 Objekte in r = 2 Dimensionen

1 Vgl. Kapitel 5 dieser Arbeit, insbesondere Abschnitt 5.3.

2 Für die additive Konstante ergab sich c = 2,0. Es wurde mit einer zentrierten Matrix der Skalarprodukte B^{++} eine Ausgangskonfigurationsmatrix X^{++} ermittelt, deren Origo im Schwerpunkt der Punktwolke liegt.

Weitere Möglichkeiten zur Bestimmung von Startkonfigurationen unter Berücksichtigung von Inputinformationen, auf die hier nicht weiter eingegangen werden soll, sind von YOUNG[1] und von GUTTMAN[2] vorgeschlagen worden.

Sind die n x r Koordinatenwerte durch die Matrix X^o bzw. nach der ersten Iteration für die Matrix X quantifiziert, so wird die daraus resultierende Konfiguration im dritten Schritt normiert, da sich dann für den weiteren Verlauf der Rechnung einige Vereinfachungen ergeben. Die S t a n d a r d i s i e r u n g besteht einmal aus einer Translation des Origos in den Schwerpunkt der Punktwolke ($\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_t, \ldots, \bar{x}_r$). Zum anderen werden die Koordinatenachsen so gestreckt bzw. gestaucht, daß die Summe der quadratischen Abweichungen der transformierten Punkte vom Origo in jeder Dimension t genau 1 ergibt. Es handelt sich hierbei um ein statistisches Grundproblem, welches in der hier verwandten Symbolik kurz dargestellt werden soll. Der Mittelpunkt $\bar{x}_t$ in der Dimension t ergibt sich als

$$\bar{x}_t = \frac{\sum_i x_{it}}{n} \quad ; \quad t = 1,2,\ldots,r \quad .$$

Die Summe der quadratischen Abweichungen SQA_t in der Dimension t ergibt sich nach folgender Formel[3].

$$SQA_t = \sum_i (x_{it} - \bar{x}_t)^2$$

---

1 YOUNG, F.W.: A model for polynominal conjoint analysis algorithms, a.a.O., S. 91 ff.

2 GUTTMAN, L.A. A general nonmetric technique for finding the smallest coordinate space for a configuration of points, a.a.O., S. 499 f.; GUTTMAN, L.A.: Three GUTTMAN-LINGOES families of computer programs for nonmetric data analysis, o. Ort- u. Zeitangabe. Ausgehändigt durch: Bell Laboratories, Murray Hill (USA).

3 Die Division durch n-1 entfällt, da die Konfiguration bis auf einen Transformationsfaktor unverändert bleibt.

Es lassen sich nun die normierten Koordinatenwerte x'_{it} berechnen.

$$x'_{it} = \frac{x_{it} - \bar{x}_t}{\sqrt{SQA_t}}$$

So ergibt sich für die mit Zufallszahlen erhaltene Ausgangskonfiguration die normierte n x r Konfigurationsmatrix X'^{o}_{b}.

$$\bar{x}_1 = 6{,}160 \qquad SQA_1 = 11{,}027$$
$$\bar{x}_2 = 4{,}075 \qquad SQA_2 = 43{,}089$$

$$X'^{o}_{b} = \begin{bmatrix} 0{,}34 & -0{,}47 \\ -0{,}21 & -0{,}26 \\ 0{,}58 & -0{,}11 \\ 0{,}71 & 0{,}84 \end{bmatrix}$$

Die Normierung erfolgt zu Beginn der NMDS-Prozedur für die Ausgangskonfiguration X^o und anschließend jedesmal, wenn die äußere Iterationsschleife durchlaufen wird, d.h. für die Konfiguration X.

Danach werden im vierten Schritt für eine beliebige Konfiguration X mit Hilfe verschiedener Distanzfunktionen ${}_p d_{ij}$ für jedes Objektpaar (i,j) die Abstände berechnet, d.h. eine Matrix D aufgestellt.

$$D = \left[d_{ij} \right] \qquad \begin{matrix} i = 1,2,\ldots,n \\ j = 1,2,\ldots,n \end{matrix}$$

Es ergeben sich z.B. für den Zufallstart nach der Normierung folgende euklidische Distanzen ${}_2 d_{ij}$.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}59 & 0{,}43 & 1{,}68 \\ & 0 & 0{,}80 & 1{,}21 \\ & & 0 & 1{,}60 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Um nun zu gewährleisten, daß die auf diese Art erhaltenen Distanzwerte in einer monotonen Beziehung zu den ordinalen Unähnlichkeitswerten stehen, muß das Verfahren der monotonen Regression, welches im nächsten Abschnitt erläutert wird, eingesetzt werden.

6.3 Verfahren der monotonen Regression

Die NMDS versucht in den Distanzen zwischen den Punkten der Konfiguration möglichst die gleichen Ordnungsrelationen wie in der Inputmatrix wiederzugeben. Daher ist die Distanzmatrix Ausgangspunkt des fünften Schrittes der sog. m o n o t o n e n R e g r e s s i o n[1]. Mit diesem Verfahren sollen die einzelnen Objektpaardistanzen d_{ij} so in angepaßte Werte $\hat{d}_{ij}$ transformiert werden, daß zwischen den Distanzen $\hat{d}_{ij}$ und den Unähnlichkeitswerten $\bar{e}_{ij}$ eine monotone Beziehung besteht.

Es habe sich für n = 4 Objekte eine Inputmatrix S mit den Unähnlichkeitsrängen $\bar{e}_{ij}$ ergeben, und es sei die Distanzmatrix mit den Distanzen d_{ij} für jedes Objektpaar ermittelt worden.

$$S = \left[\bar{e}_{ij}\right] = \begin{bmatrix} - & 2 & 5 & 6 \\ & - & 1 & 3 \\ & & - & 4 \\ & & & - \end{bmatrix}$$

$$D = \left[d_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}59 & 0{,}43 & 1{,}68 \\ & 0 & 0{,}80 & 1{,}21 \\ & & 0 & 1{,}60 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

In einem Diagramm läßt sich nun leicht überprüfen, ob die Monotoniebedingung eingehalten worden ist. Auf der Abszisse werden die Distanzen d_{ij} und auf der Ordinate die ordinalen Unähnlichkeitswerte $\bar{e}_{ij}$ abgetragen. Es ergeben sich dann für jedes Objektpaar die mit einem 'x' gekennzeichneten Punkte mit den Koordinaten $(d_{ij}, \bar{e}_{ij})$. Verbindet man diese Punkte, so ist die schwach monotone Beziehung zwischen $\bar{e}_{ij}$ und d_{ij} nur dann erfüllt, wenn diese Verbindungslinie sich stets nur nach oben und/oder nach rechts bewegt (vgl. Abb. 15).

---

1 Vgl. KRUSKAL, J.B.: Nonmetric multidimensional scaling: A numerical method, a.a.O., S. 126 ff.; vgl. YOUNG, F.W.: A model for polynomial conjoint analysis algorithms, a.a.O., S. 95 ff.

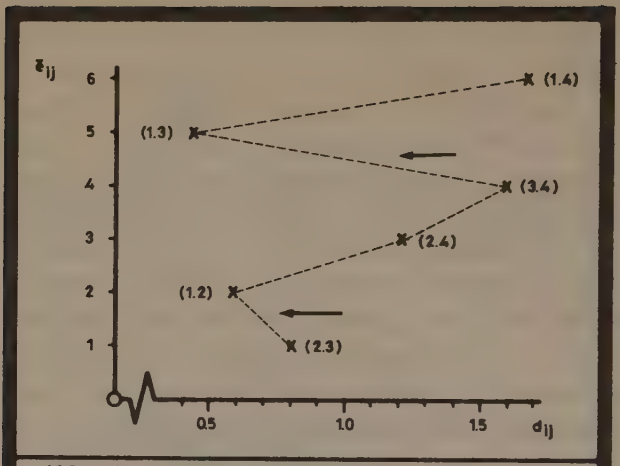


Abb. 15: Darstellung der 'Regressionslinie' zwischen Unähnlichkeitswerten $\bar{e}_{ij}$ und Distanzen d_{ij}

In Abb. 15 ergeben sich aber Bereiche, in denen die Monotoniebedingung verletzt wird. Diese Stellen sind mit einem '←' gekennzeichnet. Die monotone Regression berechnet daher neue Distanzen $\hat{d}_{ij}$, damit nichtmonotone Bereiche der Regressionslinie verschwinden.
Für das Beispiel kann man den Vorgang dieser Prozedur mit der Übersicht 9 verdeutlichen. Insgesamt sind drei Iterationen nötig, bis die angepaßten $\hat{d}_{ij}$ erhalten werden. Dieser Prozeß wird auch als innere Iteration bezeichnet.

$\bar{e}_{ij}$	1	2	3	4	5	6	Iterationsschritt
(ij)	(2,3)	(1,2)	(2,4)	(3,4)	(1,3)	(1,4)	
d_{ij}	0,80	0,59	1,21	1,60	0,43	1,68	
	0,80	0,59	1,21	1,60	0,43	1,68	1.
$\hat{d}_z$	0,695		1,21	1,015		1,68	2.
	0,695		1,08			1,68	3.
$\hat{d}_{ij}$	0,695	0,695	1,08	1,08	1,08	1,68	

Übers. 9 : Blockverschmelzung bei der monotonen Regression (innere Iteration)

Ordnet man den Objektpaaren nun die korrigierten Werte $\hat{d}_{ij}$ zu und verbindet man die durch die Koordinatenwerte ($\bar{e}_{ij}$, $\hat{d}_{ij}$) vorgegebenen und mit einem ' □ ' gekennzeichneten Punkte, so ergibt sich eine monotone Funktion, wie Abb. 16 zeigt.

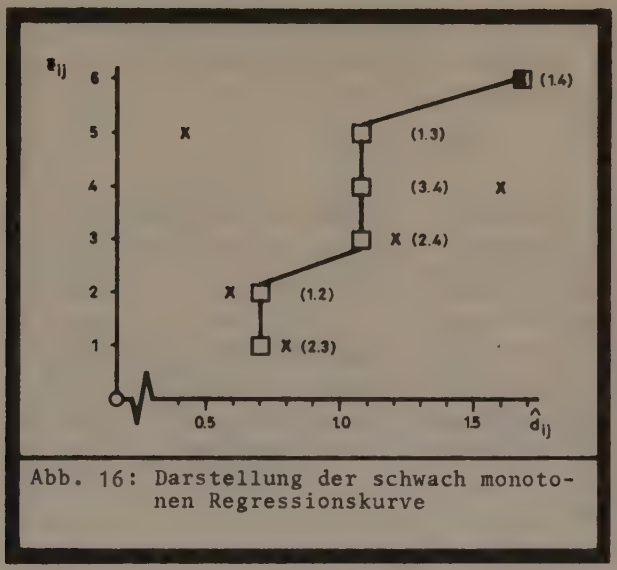


Abb. 16: Darstellung der schwach monotonen Regressionskurve

Es ist somit gelungen, aus den Unähnlichkeitswerten, d.h. mit Hilfe der Inputmatrix, über die (Ausgangs-)Konfiguration X Distanzen $\hat{d}_{ij}$ abzuleiten, die die gleiche Ordnungsstruktur wie die Unähnlichkeitswerte der Inputmatrix besitzen.

Formal läßt sich die Umwandlung der Distanzen d_{ij} in angepaßte Werte $\hat{d}_{ij}$, die die Monotoniebedingung erfüllen, folgendermaßen darstellen: Zu Beginn des Verfahrens werden die $\bar{e}_{ij}$, beginnend mit dem kleinsten Wert, der Größe nach geordnet und in sog. Blöcke aufgeteilt, und zwar so, daß

jedem Objektpaar ein Block zugeordnet wird. Jeder Block z ist gekennzeichnet durch einen Blockwert $\hat{d}_z$. Jeder Blockwert ist identisch mit der dem $\bar{e}_{ij}$ zugeordneten Distanz d_{ij}. Mittels verschiedener Entscheidungsregeln werden dann Blöcke zusammengeschmolzen und der gemeinsame Blockwert des vereinigten Blockes errechnet. Dieser ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der Distanzen der Teilblöcke. Bezeichnet man drei aufeinanderfolgende Blöcke mit z-,z,z+, dann ist die Monotoniebedingung erfüllt, wenn gilt:

$$\hat{d}_{z-} < \hat{d}_z < \hat{d}_{z+}$$

Der mittlere Blockwert $\hat{d}_z$ orientiert sich sowohl nach dem Blockwert $\hat{d}_{z-}$ des links liegenden Blockes z-, als auch nach dem rechts liegenden Block z+ und dessen Blockwert $\hat{d}_{z+}$. Gilt die Beziehung $\hat{d}_{z-} < \hat{d}_z < \hat{d}_{z+}$, so wird an der Unterteilung der Blöcke nichts verändert. Wenn allerdings $\hat{d}_z \geq d_{z+}$ oder $\hat{d}_{z-} \geq \hat{d}_z$ ist, so werden $\hat{d}_z$ und $\hat{d}_{z+}$ bzw. $\hat{d}_{z-}$ und $\hat{d}_z$ zu einem gemeinsamen Block verschmolzen. Dieser Prozeß wiederholt sich so lange, bis für μ Blöcke $(z_1, z_2, \ldots, z_\mu)$ gilt:

$$\hat{d}_{z_1} < \hat{d}_{z_2} < \ldots < \hat{d}_{z_\mu}$$

Da es bei Verletzung der Monotonie immer zu einer Blockverschmelzung kommt, erhält man als Resultat die angepaßte $\hat{d}_{ij}$ aus den entsprechenden Blockwerten $\hat{d}_z$. Diese $\hat{d}_{ij}$ ('fitted values', 'disparities') geben an, wie groß die Distanz für Objektpaar (i,j) hätte sein müssen, wenn die Monotoniebedingung erfüllt sein soll. Diese Distanzen $\hat{d}_{ij}$ sind notwendige Voraussetzung, um die Koordinatenwerte für die Endkonfiguration festlegen zu können. Zuvor muß nun aber eine Größe definiert werden, welche die Güte der Anpassung an die Ausgangsdaten quantifiziert.

6.4 Ermittlung der Anpassungsgüte

Das Ziel der Definition eines A n p a s s u n g s m a ß e s ist die Schaffung eines operationalen Entscheidungskriteriums zur Festlegung der gesuchten Endkonfiguration X^{opt}. In der Literatur findet man eine Vielzahl verschiedener Maße für die im sechsten Schritt zu ermittelnde Anpassungsgüte der reproduzierten Konfiguration an die Ausgangsdaten[1]. Es handelt sich dabei um den Stress 1.Art[2] S_1, den Stress 2.Art[3] S_2, den Entfremdungskoeffizient (coefficient of alienation)[4] und den Übereinstimmungsindex[5]. Die Darstellung beschränkt sich auf die beiden erstgenannten Stressgrößen, da sie in der Praxis am häufigsten angewandt werden und analoge Gedanken auch für die anderen Anpassungsmaße gelten. Je höher der numerische Wert des Stress ist, desto schlechter ist die Anpassungsgüte.

Für jedes Objektpaar (i, j) existiert ein Wertepaar $(d_{ij}, \hat{d}_{ij})$, bestehend aus den metrischen Distanzen der Ausgangskonfigurationen bzw. der Konfiguration der vorhergegangenen Iteration und den mittels monotoner Regression gefunden $\tilde{d}_{ij}$. Analog zur Regressions- bzw. Korrelationsanalyse wird nun ein Anpassungsmaß, der sog. S t r e s s S_1 berechnet.

---

1 YOUNG, F.W.: A model for polynomial conjoint analysis algorithms, a.a.O., S. 80 f.

2 KRUSKAL, J.B.: Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis, a.a.O., S.3 f.

3 KRUSKAL, J.B.: Analysis of factorial experiments by estimating monotone transformations of the data, in: The Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 27 (1965), S. 251-263, hier S. 252.

4 GUTTMAN, L.A.: A general nonmetric technique for finding the smallest coordinate space for a configuration of points, a.a.O., S. 478 ff., insbesondere S. 481.

5 GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, a.a.O., S. 192.

$$S_1 = \sqrt{\frac{S^+}{T^+}} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{\sum_{i,j} d_{ij}^2}}$$

S_1 ist die Quadratwurzel aus der Summe der quadratischen Abweichungen der Distanzen d_{ij} von den angepaßten $\hat{d}_{ij}$, dividiert durch einen Normierungsfaktor T^+. Der Stress 1 ist translations- und rotationsinvariant und durch die Normierung gegen einheitliche Streckung und Stauchung robust. Es handelt sich wie bei allen Anpassungsmaßen auch bei S_1 um eine positive, dimensionslose Zahl mit festem Definitionsbereich, die meist in Prozentschreibweise dargestellt wird ($0\% \leq S_1 \leq 100\%$). Eine perfekte Anpassung ($S_1 = 0\%$) liegt dann vor, wenn D und $\hat{D}$ identisch sind. Derartige Lösungen sind aber nicht immer möglich.
Unter bestimmten Umständen können degenerierte Lösungen[1] für X^{opt} vermieden werden, wenn der S t r e s s S_2 als Abbruchskriterium für den NMDS-Algorithmus verwandt wird. S_2 unterscheidet sich von S_1 durch den Normierungsfaktor. Hier wird zur Normierung die Summe der quadratischen Abweichung der Distanzen d_{ij} von ihrem arithmetischen Mittel $\bar{d}$ als Nenner eingesetzt.

$$S_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{\sum_{i,j} (d_{ij} - \bar{d})^2}}$$

S_2 wird normalerweise größer sein als S_1 und ist wesentlich empfindlicher gegen Monotonieverletzungen. Zwischen S_1 und S_2 besteht folgende Beziehung:

$$S_1^2 = S_2^2 \left[1 - \frac{\sum_{i,j} \bar{d}^2}{\sum_{i,j} d_{ij}^2} \right]$$

Beide Stressfunktionen haben ein gemeinsames Minimum.

---

1 Vgl. S. 111 dieser Arbeit.

So lassen sich für die Daten des Beispiels die Anpassungsmaße S_1 und S_2 berechnen. Auf Grund der Symmetrie der Matrizen D und $\hat{D}$ braucht nur eine Hälfte der Matrizen beachtet zu werden.

(i,j)	d_{ij}	d_{ij}^2	$\hat{d}_{ij}$	$(d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2$	$(d_{ij} - \bar{d})^2$
(1,2)	0,59	0,348	0,695	0,011	0,213
(1,3)	0,43	0,185	1,080	0,422	0,386
(1,4)	1,68	2,822	1,680	-	0,395
(2,3)	0,80	0,640	0,695	0,011	0,063
(2,4)	1,21	1,464	1,080	0,017	0,021
(3,4)	1,60	2,560	1,080	0,270	0,301
Σ	6,31	8,019	.	0,731	1,379

$$S_1 = \sqrt{\frac{0,731}{8,019}} = 0,302$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{0,731}{1,379}} = 0,728$$

Da die Monotoniebedingung bei der zufälligen Ausgangskonfiguration häufig verletzt wird, ergibt sich hier nur eine Lösung mit einem Stress S_1 von 30,2% bzw. S_2 = 72,8%, die als 'schlecht' bezeichnet werden muß.

Es wird zur Beurteilung der Anpassungsgüte mit Hilfe von S_1 bzw. S_2 folgendes Bewertungsschema[1] vorgeschlagen:

S_1 (in %)	S_2 (in %)	Anpassungsgüte
von 0,0% - 2,5%	von 0,0% - 5,0%	vollkommen
über 2,5% - 5,0%	über 5,0% - 10,0%	vorzüglich
über 5,0% - 10,0%	über 10,0% - 20,0%	gut
über 10,0% - 20,0%	über 20,0% - 40,0%	annehmbar
über 20,0%	über 40,0%	schlecht

Dieses Beurteilungsschema ist aber nicht generell anwendbar. Trotz der ihm entgegengebrachten Popularität in der Literatur sollten die vielfältigen Beeinflussungsgrößen des Stress in eine endgültige Beurteilung einbezogen werden.

---

1 KRUSKAL, J.B.: Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis, a.a.O., S.3; RABINOWITZ, G.B.: An introduction to nonmetric multidimensional scaling, a.a.O., S. 383.

Für die praktische Interpretation des Stress müssen die wesentlichen Einflußgrößen beachtet werden. Die numerische Höhe des Anpassungsmaßes ist abhängig von der

1. Definition: Verschiedene Computerprogramme zur Durchführung der NMDS-Prozedur benutzen unterschiedliche Formeln zur Quantifizierung der Anpassungsgüte.
2. Exaktheit der Datenerhebung: Hohe Stresswerte werden häufig durch Meßfehler in den Unähnlichkeitswerten verursacht.
3. Inputmatrix: Nichtsymmetrische Inputmatrizen (d.h. $\bar{e}_{ij} \neq \bar{e}_{ji}$ liefern zusätzlich quadratische Abweichungen. Auch leere Zellen (i,j) (missing data) haben einen Einfluß auf die numerische Höhe des Maßes.
4. Dimensionenzahl: Tendenziell nimmt der Stress mit abnehmender Dimensionenzahl zu.
5. Objektanzahl: Für ein vorgegebenes r wird der Stress bei abnehmendem n in der Regel geringer.
6. Metrik: Je nach Wahl des MINKOWSKI-Parameters[1] p ergeben sich unterschiedliche Stresswerte.
7. Monotonieart: Schwache Monotoniebedingungen produzieren geringere Stresswerte als bei Unterstellung strenger Monotonie.
8. Ausgangskonfiguration: Die Art der Fixierung der Ausgangskonfiguration beeinflußt die Möglichkeit des Erreichens eines totalen Stressminimums.
9. Objektstruktur: Kristallisieren sich innerhalb der Konfiguration einzelne Punktwolken (Cluster), so wird bei gleichem n und r dadurch der Stress beeinflußt[2].

---

1 SHERMAN, C.R.: Nonmetric multidimensional scaling: A Monte Carlo study of the basic parameters, a.a.O., S. 328.

2 Hier scheint ein iteratives metrisches Verfahren wesentlich bessere Resultate zu liefern. HOLTMANN, D.: Multidimensionale Skalierung, Methode und ihre Anwendung in den Sozialwissenschaften, a.a.O., S. 26 ff. und S. 113 ff.

Die Vielfalt der Determinanten des Stress erlaubt kaum eine einheitliche Aussage über die Anpassungsgüte. Letztlich wird eine Beurteilung der numerischen Höhe des Stresswertes von der spezifischen Problemstellung abhängen[1]. Monte-Carlo-Untersuchungen haben gezeigt[2], daß es sich empfiehlt, die Verteilung der Stresswerte für interessierende Konstellationen der Parameter (z.B. p, r, n usw.) aufzustellen und zu einer endgültigen Interpretation des Stresswertes heranzuziehen. Trotz der Schwierigkeiten der Stressinterpretation hat sich dieses Anpassungsmaß sowohl bei hypothetischen als auch bei empirischen Marktdaten bewährt.

Nachdem der Stress ermittelt worden ist, muß überprüft werden, ob die berechnete Anpassungsgüte als ausreichend anzusehen ist. Ist das nicht der Fall, wird versucht, durch Punkteverschiebungen den Stress zu minimieren. Dazu bedient man sich eines sog. iterativen Anpassungsalgorithmus, der im folgenden Abschnitt näher erläutert werden soll.

---

1 PERCY, L.H.: Multidimensional unfolding of profile data. A discussion and illustration with attention to badness of fit, in: JoMR, Vol. XII (Febr. 1975), S. 93-99.

2 WAGENAAR, W.A. und PADMOS, P.: Quantitative interpretation of Stress in KRUSKAL's multidimensional scaling technique, in: British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, Vol. 24 (1971), S. 101-110.

6.5 Iterativer Anpassungsalgorithmus

Für n Punkte gibt es im Raum mit vorgegebener Dimensionenzahl unendlich viele Möglichkeiten, diese Punkte anzuordnen. Da mit Hilfe des Stress, z.B. S_1, ein Kriterium für die Anpassungsgüte definiert worden ist, soll nun im siebten Schritt eine Konfiguration gefunden werden, die den Stress minimal werden läßt. Somit muß die Startkonfiguration sukzessive verbessert werden[1].

KRUSKAL[2] bestimmt die Position der Punkte der verbesserten Konfiguration mit Hilfe des Gradientenverfahrens. Dazu muß (1) der sog. Gradientenvektor und (2) die Schrittweite entlang dieses Vektors bestimmt werden. Danach ist es möglich, (3) die 'neuen', verbesserten Koordinatenwerte für alle Punkte zu berechnen.

(1) Die optimale Konfiguration soll so berechnet werden, daß der Stress 1 minimiert wird. Der Stress einer Konfiguration ist eine Funktion der Globaldistanzen d_{ij} aller Objektpaare (i,j), die wiederum abhängig sind von den Projektionen der n Punkte auf die r Dimensionen, d.h. von den Koordinatenwerten x_{kt} des Punktes k (k = 1,2,...,n) in den Dimensionen t (t = 1,2,...,r). Das bedeutet, daß der Stress eine zu minimierende Funktion der x_{kt} ist:

$$S_1 = f(x_{kt}) \rightarrow \min$$

Es gibt verschiedene Methoden, um eine derartige Funktion

---

1 YOUNG, F.W.: A model for polynomial conjoint analysis algorithms, a.a.O., S. 25 ff und S. 97 ff.

2 KRUSKAL, J.B.: Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis, a.a.O., S. 8 ff.; KRUSKAL, J.B.: Nonmetric multidimensional scaling: A numerical method, a.a.O., S. 117 ff.

zu minimieren.[1] Hier soll die 'Methode des steilsten Abstiegs'[2] dargestellt werden. Diese auch als 'Gradientenverfahren' bezeichnete Vorgehensweise ermittelt zunächst die Richtung des stärksten Abstiegs der Funktion S_1. Diese Richtung nennt man den (negativen) Gradienten $\vec{g}$. Der Gradient $\vec{g}$ ist ein Vektor. Die Komponenten ($g_{11},\ldots,g_{kt},\ldots,g_{nr}$) dieses Vektors sind die ersten partiellen Ableitungen $\partial S_1 / \partial x_{kt}$ der Stressfunktion S_1 nach den Koordinatenwerten x_{kt}.

$$\vec{g} = (g_{11},\ldots, g_{kt},\ldots, g_{nr})$$

$$= (- \frac{\partial S_1}{\partial x_{11}} , \ldots , - \frac{\partial S_1}{\partial x_{kt}} , \ldots , - \frac{\partial S_1}{\partial x_{nr}})$$

Bildet man die erste partielle Ableitung der Stressfunktion

$$S_1 = \sqrt{\frac{S^+}{T^+}} = \sqrt{\frac{\sum_{i,j} (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{\sum_{i,j} d_{ij}^2}} ,$$

so ergibt sich nach einigen Umformungen[3]

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_{kt}} = S_1 \sum_{i,j} (\delta^{ki} - \delta^{kj}) \left[\frac{(d_{ij} - \hat{d}_{ij})}{S^+} - \frac{d_{ij}}{T^+} \right] \left[\frac{|x_{it} - x_{jt}|}{d_{ij}} \right]^{p-1}$$

$$\cdot \text{ sign } (x_{it} - x_{jt}) .$$

Da die Summanden der Stressfunktion S_1 für $i, j \neq k$ konstante Größen bei der Differentiation darstellen, brauchen sie nicht

---

1 SPANG, H.A.: A review of minimization techniques for nonlinear functions, in: Review of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 4 (1962), S.343-365.

2 BOOTH, A.D.: An application of the method of steepest descents to the solution of systems of non-linear simultaneous equations, in: Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. II (1949), S. 460-468.

3 Die partielle Ableitung der Stressfunktion nach den Koordinatenwerten ist im Anhang ausführlich aufgezeigt. Vgl. S. 193 ff dieser Arbeit.

beachtet zu werden. Formal wird dieser Gedanke durch das Einführen eines sog. KRONECKER-Symbols δ^{ki} bzw. δ^{kj} berücksichtigt, welches folgendermaßen definiert ist:

$$\delta^{ki} = \begin{cases} 1 \text{ falls } i = k \\ 0 \text{ falls } i \neq k \end{cases}$$

$$\delta^{kj} = \begin{cases} 1 \text{ falls } j = k \\ 0 \text{ falls } j \neq k \end{cases}$$

Der Faktor $\text{sign}\,(x_{it} - x_{jt})$ in der Gleichung für die erste partielle Ableitung der Stressfunktion ist ein Vorzeichenoperator mit der Bedeutung

$$\text{sign}\,(x_{it} - x_{jt}) = \begin{cases} +1 \text{ falls } x_{it} > x_{jt} \\ 0 \text{ falls } x_{it} = x_{jt} \\ -1 \text{ falls } x_{it} < x_{jt} \end{cases}.$$

Innerhalb jeder Iteration werden nun die Punkte so verschoben, daß die Stressfunktion möglichst minimiert wird, d.h. sie werden in Richtung des negativen Gradienten bewegt.

(2) Es muß nun die Schrittweite α entlang dieses stärksten Abstiegs bestimmt werden, dabei ist α so zu bestimmen, daß möglichst schnell das Minimum der Stressfunktion gefunden wird. Wird α zu gering gewählt, so ist die Stressveränderung ΔS in jeder Iteration sehr gering, und es ist eine große Anzahl von Iterationen nötig, um das Minimum zu finden. Bei zu großer Schrittweite besteht allerdings die Gefahr, daß das Minimum überschritten wird und der Funktionswert für S_1 wieder steigt. Es ist daher am sinnvollsten, am Anfang der Iteration mit relativ großen α (α =0,2) zu beginnen und die Schrittweite mit zunehmender Iterationenzahl zu verkleinern. Es wird dabei die Rechenzeit verkürzt, ohne daß die Güte der Lösung beeinflußt wird. Zur Bestimmung einer optimalen Schrittweite werden verschiedene Vorgehens-

weisen vorgeschlagen, auf die hier nur verwiesen werden kann[1]. Nach der Berechnung des Gradienten und der Schrittweite empfiehlt es sich, in den Iterationsprozeß eine Stoppregel einzubauen, damit im achten Schritt eine Entscheidung darüber gefällt werden kann, ob der Anpassungsprozeß als beendet anzusehen ist oder nicht. Am häufigsten sind folgende Abbruchkriterien in den Computerprogrammen installiert.

1. Um die Rechenzeit in Grenzen zu halten, wird eine maximale Anzahl von Iterationen durch externe Vorgabe definiert (Standardeingabe: 50).
2. Erreicht der Stress S_1 eine bestimmte vom Benutzer festzusetzende Größe S_c, so wird der Prozeß abgebrochen, wenn gilt $S_1 \leq S_c$ (Standardeingabe: $S_c = 0{,}05$).
3. Bei den meisten Computerprogrammen zur nichtmetrischen mehrdimensionalen Skalierung wird für jeden Iterationsschritt der dazugehörige Stresswert mit ausgedruckt. Ist die Stressveränderung zwischen den einzelnen Iterationen ΔS nur sehr gering, so sollte das Verfahren beendet werden.
4. Wenn die Schrittweite $\alpha \approx 0$ ist, sollte keine Verbesserung angestrebt werden.

Diese Abbruchkriterien sind zwar einzeln anwendbar, trotzdem empfiehlt sich eine parallele Verwendung mehrerer Stoppregeln.

(3) Ist das Stoppkriterium nicht erfüllt, so wird die Anpassungsprozedur fortgesetzt. Es wird nun mit Hilfe der Komponenten des Gradientenvektors g_{it} und der Schrittweite α eine verbesserte Konfiguration ermittelt. Es soll nun also

---

1 BOOTH, A.D.: An application of the method of steepest descents to the solution of systems of non-linear simultaneous equations, a.a.O., S. 460-468; KRUSKAL, J.B.: Nonmetric multidimensional scaling: A numerical method, a.a.O., S. 120 ff.; HOLTMANN, D.: Multidimensionale Skalierung, Methode und ihre Anwendung in den Sozialwissenschaften, a.a.O., S. 30 ff.; SCHOBERT, R.: Die mehrdimensionale Skalierung als Instrument der Absatzforschung, a.a.O., S. 32 ff.; SPANG, H.A.: A review of minimization techniques for nonlinear functions, a.a.O., S. 349.

eine n x r Matrix

$$X = \left[x_{it}^{neu}\right]$$

ermittelt werden. Der sich aus dieser Matrix ergebende Stress soll möglichst geringer sein als der Stress der alten Konfiguration. Um nun die neuen verbesserten Koordinatenwerte im neunten Schritt berechnen zu können, müssen die Komponenten g_{it} des Gradientenvektors normiert werden in g'_{it}.

$$g'_{it} = \frac{g_{it}}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{n,t} g_{it}^2}} = -\frac{\partial S/\partial x_{it}}{mag(g)}$$

Die transformierten Werte g'_{it} ergeben sich also durch Division der ursprünglichen Werte g_{it} durch einen Normierungsfaktor, der auch als 'Mächtigkeit des Gradientenvektors' mag(g) bezeichnet wird. Die alten Koordinatenwerte x_{it}^{alt} werden nun in neue x_{it}^{neu} umgeformt.

$$x_{it}^{neu} = x_{it}^{alt} + \alpha \cdot g'_{it}$$

Diese neuen Koordinatenwerte besitzen in der Regel eine höhere Anpassungsgüte als die alten.
Ein anderer Weg zur Bestimmung der verbesserten Konfiguration wird im TORSCA-Programm[1] durchgeführt. Die Richtung und die Schrittweite bei der Verschiebung eines Punktes i sind abhängig von der Differenz zwischen der Interpunktdistanz d_{ij} und der angepaßten Distanz $\hat{d}_{ij}$. Betrachtet man z.B.einen bestimmten Punkt i und einen anderen Punkt j, so wird i näher

---

1 YOUNG, F.W.: TORSCA, an IBM program for nonmetric multidimensional scaling, in Journal of Marketing Research, Vol. 5 (Aug. 1968), S.319-321; vgl. GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, a.a.O., S. 39.

an j geschoben, wenn $d_{ij} > \hat{d}_{ij}$ ist und weiter weggeschoben von j, wenn $d_{ij} < \hat{d}_{ij}$ ist. Der Betrag der Verschiebung des Punktes i zu j hin bzw. von j weg ist proportional zur Differenz $d_{ij} - \hat{d}_{ij}$. Jeder Punkt i hat also n-1 Korrekturvektoren, und zwar jeweils einen für die Punkte $j \neq i$. Bezeichnet man mit α eine Proportionalitätskonstante ($0 \leq \alpha \leq 1$), so ergeben sich die verbesserten Koordinatenwerte als

$$x_{it}^{neu} = x_{it}^{alt} + \frac{\alpha}{n-1} \sum_{j \neq i}^{n} \frac{(d_{ij} - \hat{d}_{ij})\,(x_{jt}^{alt} - x_{it}^{alt})}{d_{ij}}$$

$$= x_{it}^{alt} + \frac{\alpha}{n-1} \sum_{j \neq i}^{n} \left[1 - \frac{\hat{d}_{ij}}{d_{ij}} \right] (x_{jt}^{alt} - x_{it}^{alt}) \quad .$$

Die neuen Koordinatenwerte beschreiben eine neue Konfiguration im r-dimensionalen Raum, die mehr an die Ordnungsrelationen der Inputmatrix angepaßt ist und somit einen geringeren Stress besitzt.

Die nach dieser Anpassung neu erhaltene Punktekonfiguration wird dann wieder im dritten Schritt normiert, und der iterative Prozeß beginnt von neuem, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist. Ab dem zweiten Durchlauf entfällt natürlich die Bestimmung einer Ausgangskonfiguration.

Wird eine Stoppregel wirksam, so gilt die Konfiguration der letzten Iteration als optimal. Der zehnte Schritt stellt mit der Ermittlung der Endkonfiguration (final configuration) das Ende der nichtmetrischen MDS dar.

Häufig ergeben sich auf Grund der lokalen Minima der in Abb. 17 dargestellten Stressfunktion einige P r o b l e m e . Es entsteht nun die Frage, wie der Anwender das Erreichen eines lokalen Minimums erkennen kann.

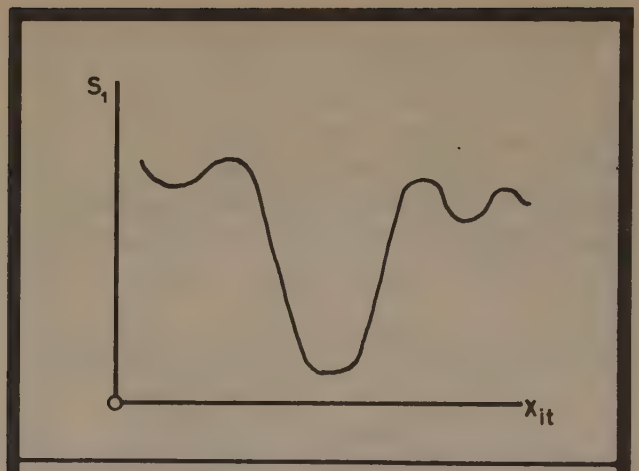


Abb. 17 : Zusammenhang zwischen Stress S_1 und Koordinatenwert x_{it} eines Punktes

Hinweise auf mögliche Suboptima sind die Stresshöhe der Endkonfiguration und die relative Mächtigkeit des Gradientenvektors[1]. Liegt der Verdacht des Erreichens eines Suboptimums nahe, so empfiehlt sich eine Vergrößerung der Schrittweite α, da dadurch ein lokales Minimum überstiegen werden kann. Außerdem empfiehlt es sich, ein anderes Maß für die Anpassungsgüte anzuwenden. Weitere Hilfsmittel sind Wiederholungen der NMDS mit anderer Dimensionenzahl und/oder anderem Metrikparameter. Es ergibt sich nach diesen Variationen eine relativ eindeutig beste Lösung.
Eine sinnvolle objektive Interpretation der Dimensionen liefert die NMDS nach SHEPARD und KRUSKAL nicht. Man sollte daher nur von einer Möglichkeit zur Interpretation des NMDS-Output sprechen, um zu zeigen, daß die inhaltliche Umschreibung der Dimensionen ohne zusätzliche Hilfsmittel[2] subjektiv ist. Vorsicht bei der

---

1 SCHOBERT, R.: Die mehrdimensionale Skalierung als Instrument der Absatzforschung, a.a.O., S.35.

2 Vgl. Abschnitt 8.3. dieser Arbeit.

Anwendung der NMDS ist insbesondere dann geboten, wenn die Konfiguration aus weit voneinander liegenden Punktwolken (Clustern) besteht. In einem solchen Fall sollte man entweder die Objekte, die einer Punktwolke angehören, separat skalieren oder ein neu entwickeltes, hier nicht näher erwähntes iterativ-metrisches MDS-Verfahren[1] anwenden.
Neben suboptimalen Lösungen existiert noch das Problem der degenerierten Lösungen[2]. Man spricht von degenerierten Konfigurationen, wenn die in den Ähnlichkeitsdaten enthaltenen Strukturen nur sehr grob durch die Konfiguration wiedergegeben werden. Das ist immer dann der Fall, wenn die Punkteanordnung aus regelmäßigen geometrischen Gebilden besteht, deren Eckpunkte Cluster darstellen und diese Konfiguration einen Stresswert von annähernd Null besitzt. Derartige Fälle sind bei kleinem Stresswert leicht zu identifizieren. Da aber häufig der Anpassungsprozeß unterbrochen wird, wenn der Stress eine kritische Größe (S_c = 0,05) unterschreitet, kann häufig der Degenerationsprozeß zwar eingeleitet, aber noch nicht erkennbar sein. Insofern stellen degenerierte Lösungen ein Problem bei der Anwendung der NMDS dar, welches bei den meisten empirischen Untersuchungen sträflich übersehen wird und häufig zu Überinterpretationen führt.

---

1 HOLTMANN, D.: Multidimensionale Skalierung, Methode und ihre Anwendung in den Sozialwissenschaften, a.a.O., S. 26 ff., S. 108 ff., insbesondere S. 113.

2 SHEPARD, R.N.: Repräsentation of structures in similarity data: problems and prospects, in: Psychometrika, Vol. 39 (1974), S. 373-418.

7 NICHTAGGREGIERENDE MDS-VERFAHREN

7.1 Problematik der Aggregation und Notwendigkeit der Disaggregation

Bei der Darstellung der Algorithmen der metrischen und nichtmetrischen MDS ist davon ausgegangen worden, daß es sinnvoll ist, Ähnlichkeits- bzw. Präferenzdaten über verschiedene Vpn in irgendeiner Weise zu summieren. Implizit werden bei diesen als 'aggregate scaling' bezeichneten Verfahren somit folgende Annahmen unterstellt.

- Der Wahrnehmungs- und Präferenzraum ist hinsichtlich Art und Umfang der Beurteilungsdimensionen über alle Vpn gleich.
- Der Mittelwert der Skalenwerte des Objekts gibt relativ gut die Vpn-Wahrnehmung und -präferenz wieder.
- Der abgeleitete Idealpunkt gilt für alle Vpn.

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so ergeben sich für die aggregierenden Verfahren gewichtige Vorteile.

- Es wird u.U. eine hohe Kompensation des Zufallsfehlers erreicht.
- Die grafische und rechentechnische Datenverarbeitung vereinfacht sich erheblich.
- Es wird ermöglicht, eine auf Einzelbeobachtungen technisch und ökonomisch nicht durchführbare Analyse auf aggregierter Ebene zu erstellen.

Empirische Untersuchungen haben allerdings bestätigt, daß aggregierende Verfahren bei großer Streuung der Einzelwerte der Vpn statistische Artefakte als Ergebnis produzieren. Die Gründe hierfür liegen in der interindividuellen Heterogenität hinsichtlich Art, Umfang und Gewichtung der Beurteilungsdimensionen und der individuell unterschiedlichen Lage der Idealpunkte bzw. -vektoren. Erhebliche Fortschritte

bei der Berücksichtigung individueller Wahrnehmungs-und Präferenzunterschiede sind durch spezielle 'nichtaggregierende' Verfahren erreicht worden. Insbesondere der 'points of view'-Ansatz von TUCKER und MESSICK[1] und das Modell von CARROLL und CHANG[2] sind von besonderer Bedeutung. Weitere Ansätze von HORAN[3] und McGEE[4] versuchen ebenfalls statt der Berechnung einer durchschnittlichen Konfiguration eine personen- bzw. gruppendifferenzierte Analyse[5].

7.2 Disaggregierte Verarbeitung von Ähnlichkeitsdaten

Es bestehen individuelle Unterschiede hinsichtlich der Wahrnehmung der Objekte, die aus den Ähnlichkeitsdaten abgeleitet werden. Hier ist das Modell von CARROL und CHANG als Beispiel für ein nichtaggregierendes Verfahren

---

1 TUCKER, L.R. und MESSICK, S.: An individual differences model for multidimensional scaling, in: Psychometrika, Vol. 28 (1963), S. 333-367.

2 CARROLL, J.D.: Individual differences and multidimensional scaling, a.a.O., S. 105-155; CARROLL, J.D. und CHANG, J.J.: Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of 'ECKART-YOUNG' decomposition, in: Psychometrika, Vol. 35 (1970), S. 283-319; CARROLL, J.D.: An overview of multidimensional scaling methods emphasizing recently developed models for handling individual differences, in: KING, C.W. und TIGERT, D.J., (Hrsg.): Attitude research reaches new heights, Chicago 1971, S. 235-262.

3 HORAN, C.B.: Multidimensional scaling: Combining observations when individuals have different perceptual structures, in: Psychometrika, Vol. 34 (1969), S. 139-165.

4 McGEE, V.E.: Multidimensional scaling of N sets of similarity measures: A nonmetric individual differences approach, a.a.O., S. 233-248.

5 Vgl.CLIFF, N.: The 'idealized individual' interpretation of individual differences in multidimensional scaling, in: Psychometrika, Vol. 33, No. 2 (June 1968), S. 225-232.

ausgewählt worden. Dieser Ansatz wird deshalb beschrieben, weil empirische Anwendungen erfolgversprechend sind und das entsprechende Computerprogramm INDSCAL[1] verfügbar war. Dieses als 'Individual Differences Scaling' bezeichnete Verfahren ermittelt drei verschiedene Räume, nämlich (1) den aggregierten Objektraum, (2) den Subjektraum und (3) den personenspezifischen Wahrnehmungsraum. Die Vorgehensweise soll an einem hypothetischen Beispiel erläutert werden.

(1) Ausgangspunkt ist der aggregierte Objektraum, der mit der mittleren Wahrnehmung für alle Objekte (●) vergleichbar ist. Bezeichnet man mit A, B, C,...,J die n = 9 Objekte,

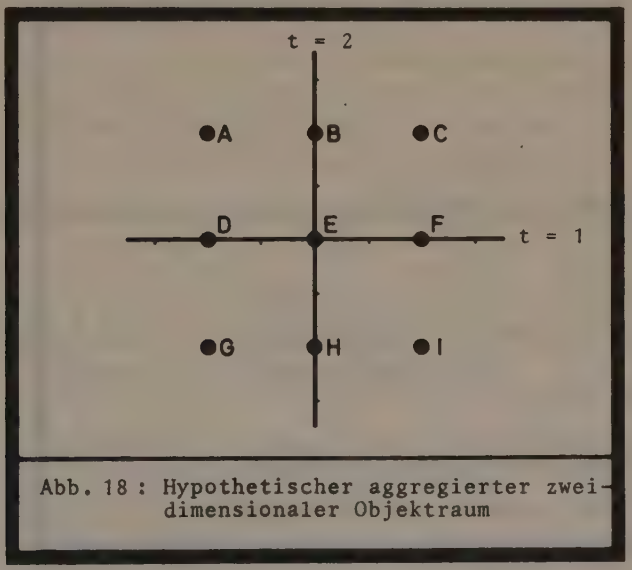


Abb. 18 : Hypothetischer aggregierter zweidimensionaler Objektraum

Quelle: CARROLL, J.D.: An overview of multidimensional scaling methods emphasizing recently developed models for handling individual differences, a.a.O., S. 243.

---

1 Vgl. GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Multidimensional scaling and individual differences, in: JoMR, Vol. VIII (Febr.1971), S. 71-77; vgl. CARROLL, J.D.: An overview of multidimensional scaling methods emphasizing recently developed models for handling individual differences, a.a.O., S. 235-249; GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, a.a.O., S. 230 ff.

so soll hier von einem zweidimensionalen aggregierten Objektraum, wie er in Abb.18 dargestellt ist, ausgegangen werden.

(2) Als zweiter Raum wird im INDSCAL-Modell ein Personenraum (subject space) berechnet. Bezeichnet man mit 1,2,...,9 verschiedene Vpn, so können diese als Kreise (o) dargestellt werden. Die Position des Kreises für Vp g im Subjektraum ist abhängig von dem relativen Gewicht w_{gt}, welches die Vp g der Dimension t beimißt. Diese personenspezifischen Gewichte sind nichts anderes als Streckungs- und Stauchungsfaktoren der Dimensionen des gemeinsamen Objektraumes. So kann sich z.B. für $n_g = 9$ Vpn folgender Subjektraum ergeben:

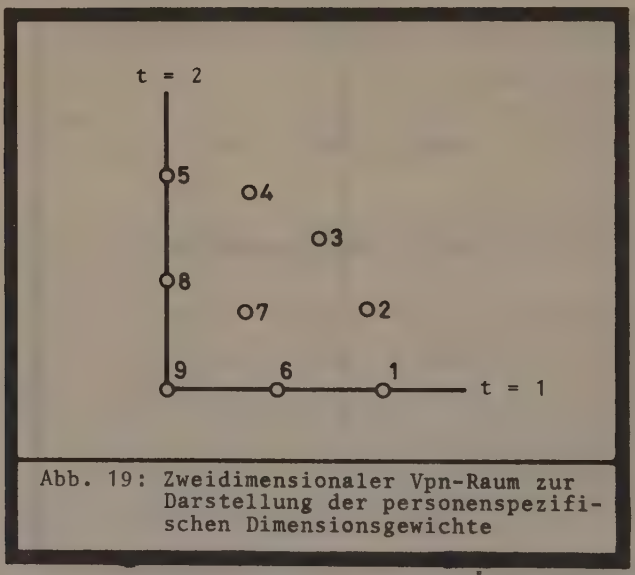


Abb. 19: Zweidimensionaler Vpn-Raum zur Darstellung der personenspezifischen Dimensionsgewichte

Quelle: CARROLL, J.D.: An overview of multidimensional scaling methods emphasizing recently developed models for handling individual differences, a.a.O., S. 247.

Wie Abb.19 verdeutlicht, wertet Vp 3 die Dimension t = 1 und t = 2 gleich ($w_{31} = w_{32}$). Das bedeutet, daß der personenspezifische Wahrnehmungsraum mit dem gemeinsamen Objektraum übereinstimmt. Subjekt 1 beurteilt nur nach Dimension t = 1, und Dimension t = 2 wird überhaupt nicht bewertet ($w_{12} = 0$). Weniger extrem urteilt die Vp 2, die die erste

Dimension stärker gewichtet als die zweite. Die Distanz des Kreises (o) für die Vp vom Ursprung des Subjektraumes ist ein Maß für den Anteil an der Varianz der Daten, die durch das Subjekt verursacht worden ist. Vpn, deren Koordinatenwerte auf einem Ursprungsfahrstrahl liegen, haben exakt das gleiche Verhältnis der einzelnen Dimensionsgewichte wie z.B. Vpn 3 und 7. Vpn-Kreise, die nah am Origo liegen, sind im allgemeinen weniger gut zu analysieren. Die Gründe hierfür liegen darin, daß derartige Vpn entweder sehr empfindlich hinsichtlich anderer nicht erfaßter Dimensionen sind, oder daß sie völlig willkürlich geantwortet haben. Subjekt 9 ($w_{91} = 0$, $w_{92} = 0$) ist deshalb im Rahmen dieser zweidimensionalen Darstellung nicht weiter zu analysieren.

(3) Mit Hilfe der individuellen Dimensionsgewichte w_{gt} lassen sich also durch Stauchung bzw. Streckung personenspezifische Wahrnehmungsräume ableiten. In Abb.20 werden für die Vpn 1,2,3,4,5 die "persönlichen" Objekträume dargestellt.

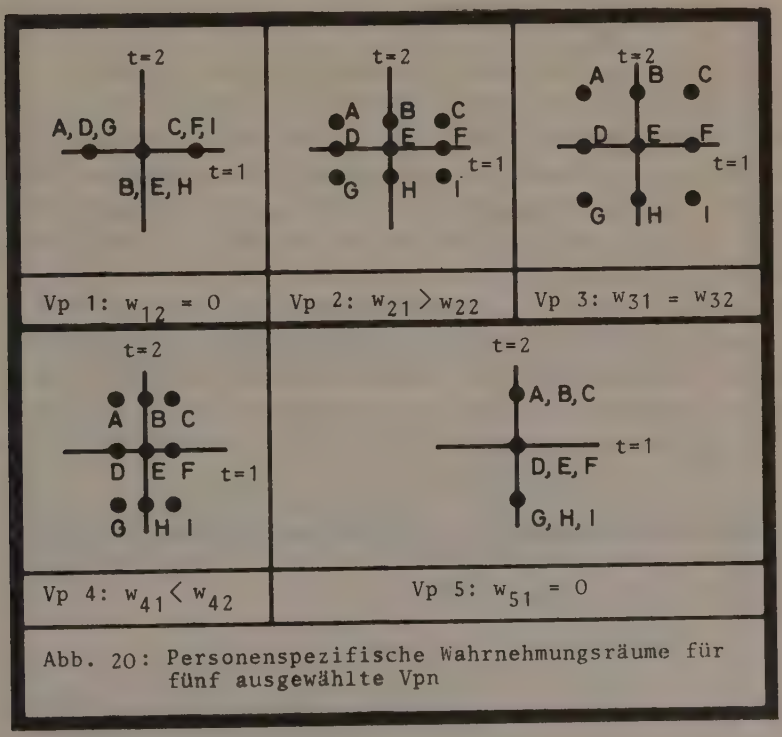


Abb. 20: Personenspezifische Wahrnehmungsräume für fünf ausgewählte Vpn

Das entsprechende Computerprogramm INDSCAL[1] ist eine metrische Prozedur und unterstellt formal folgendes Modell: Es wird angenommen, daß der Wahrnehmungsraum der Objekte ein r-dimensionaler Raum ist und alle Vpn die gleichen Beurteilungsdimensionen besitzen. Mit x_{it} wird der Skalenwert des i-ten Objektes in der t-ten Dimension ($i = 1,2,\ldots,n$; $t = 1,2,\ldots,r$) des aggregierten Objektraumes bezeichnet. Das Modell setzt voraus, daß zwischen Ähnlichkeit und Distanz eine lineare Beziehung besteht. Die euklidische Distanz im aggregierten Objektraum wird durch Hinzufügen der Gewichte w_{gt} modifiziert.

$$ {}_2d_{ij}^{(g)} = \left(\sum_{t=1}^{r} w_{gt} \, (x_{it} - x_{jt})^2 \right)^{1/2} $$

Der Koordinatenwert $y_{it}^{(g)}$ für Objekt i in der Dimension t im Wahrnehmungsraum für Vp g berechnet sich als

$$ y_{it}^{(g)} = w_{gt}^{1/2} \, x_{it} \quad . $$

In diesem Raum gelten dann allerdings die gewöhnlichen euklidischen Abstände. Die Verfahren zur Schätzung der n x r Matrix X der Koordinatenwerte des gemeinsamen Objektraumes und der n_g x r Matrix $W = [w_{gt}]$ der personenspezifischen Gewichte in jeder Dimension gehen von den n(n-1)/2 (Un-)Ähnlichkeitswerten aus. Zunächst werden die Unähnlichkeitsschätzungen in Distanzen umgeformt. Da Linearität unterstellt ist, wird dies mit Hilfe des TORGERSON-Verfahrens[2] durchgeführt. Es wird die additive Konstante c bestimmt, mit der die intervallskalierten komparativen Distanzen in verhältnisskalierte absolute Distanzen zwischen den Objektpaaren (i,j) umgeformt werden. Bezeichnet man mit $b_{ij}^{(g)}$ die Skalarprodukte zwischen den

---

1 GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, a.a.O., S. 203 ff.

2 Vgl. Kapitel 5 dieser Arbeit.

Vektoren $(y_{i1}^{(g)}, y_{i2}^{(g)}, \ldots, y_{ir}^{(g)})$, so ergeben sich ihre numerischen Werte als

$$b_{ij}^{(g)} = \sum_{t=1}^{r} y_{it}^{(g)} \, y_{jt}^{(g)} = \sum_{t=1}^{r} w_{gt} \, x_{it} \, x_{jt} \quad .$$

Die Schätzung der Matrix $X = \left[x_{it}\right]$ und $W = \left[w_{gt}\right]$, deren Elemente auf der rechten Seite der Gleichung stehen, wird mit Hilfe der sog. Kanonischen Dekomposition durchgeführt[1].

7.3 Disaggregierte Verarbeitung von Präferenzdaten

Auf eine detaillierte Darstellung der Berücksichtigung individueller Unterschiede in der Vorziehenswürdigkeit von bestimmten Objekten (Präferenzanalyse) soll hier verzichtet werden, da es sich um analoge Gedanken handelt, wie sie bereits an anderer Stelle dieser Arbeit[2] erläutert wurden. Es empfiehlt sich daher eine komprimierte Darstellung[3]. Die persönlichen Unterschiede hinsichtlich der Vorliebe für bestimmte Objekte können berücksichtigt werden durch (1) die Konstruktion von Subjektvektoren, (2) die Ableitung personenspezifischer Idealpunkte und (3) die Streckung bzw. Stauchung der Achsen eines 'mittleren Wahrnehmungsraumes' gemäß der persönlichen Dimensionsgewichte.

---

1 CARROLL, J.D. und CHANG, J.J.: Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of 'ECKART-YOUNG' decomposition, a.a.O., S. 283-319.

2 Vgl. Abschnitt 3.4 dieser Arbeit.

3 CARROLL, J.D.: An overview of multidimensional scaling methods emphasizing recently developed models for handling individual differences, a.a.O., S. 249 ff.; CARROLL, J.D.: Individual differences and multidimensional scaling, a.a.O., S. 114 ff.

(1) So wird ein spezifisches Vektormodell vorgeschlagen, bei dem die Vp gemäß ihrer Rangordnung der Objekte wie in Abb. 21 als Vektor dargestellt wird.

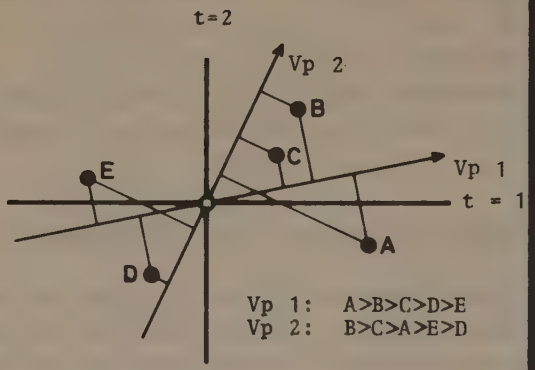


Abb. 21: Subjektvektoren für zwei Vpn hinsichtlich ihrer Präferenzrangordnungen für fünf Objekte

Mit Hilfe dieser Vektoren wird die relative Wichtigkeit der Dimension t des aggregierten Wahrnehmungsraumes für jede Vp getrennt angezeigt. Bezieht man mehrere Versuchspersonen in die Untersuchung ein und stellt ihre Präferenzrangordnungen mit Vektoren dar, so ergeben sich häufig Vektorenbündelungen. Sie zeigen an, daß relativ viele Vpn ihre Präferenzen gemäß der durch die Vektoren angegebenen Richtung ordnen.

(2) Beim personenspezifischen Idealpunktmodell wird für jede Vp getrennt ein Idealpunkt (o) I_g berechnet, dessen Lage durch die individuellen Präferenzvorstellungen determiniert ist (vgl. Abb. 22).

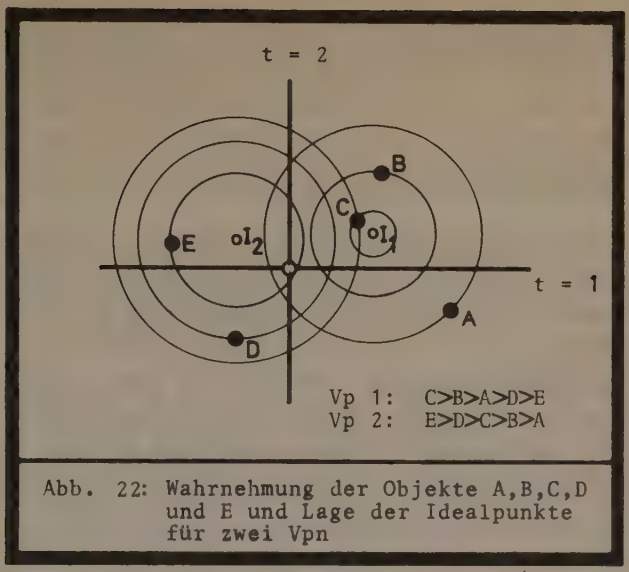


Abb. 22: Wahrnehmung der Objekte A,B,C,D und E und Lage der Idealpunkte für zwei Vpn

Bei dieser Darstellung wird allerdings unterstellt, daß alle Dimensionen gleichwertige Bestandteile der Präferenzurteile sind.

(3) Läßt man aber individuelle Gewichte w_{gt} für Individuum g auf der Dimension t zu, so läßt sich die Präferenzrangordnung nur mit Hilfe ellipsenförmiger Isopräferenzlinien (vgl. Abb. 23).

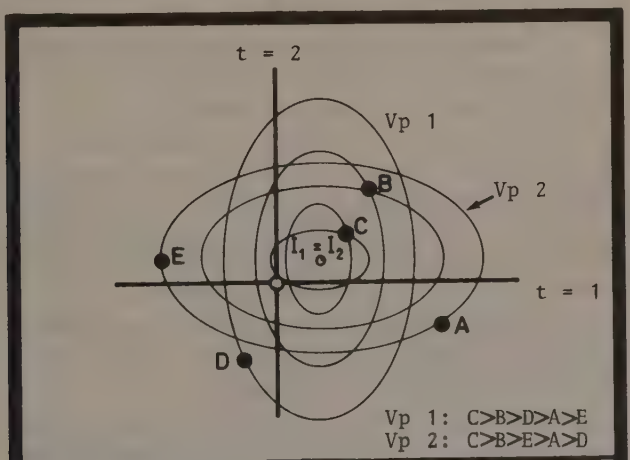


Abb. 23 : Darstellung von ellipsenförmigen Isopräferenzlinien für zwei Vpn

bestimmen. Angenommen, zwei Vpn haben die gleiche Idealpunktposition ($I_1 = I_2$) und die gleiche Wahrnehmung der Objekte, so können sie trotzdem eine unterschiedliche Präferenzrangordnung besitzen, da sie die Dimensionen unterschiedlich gewichten ($w_{11} > w_{12}$ und $w_{21} < w_{22}$).

Derartige nichtaggregierende Modelle werden in Zukunft von vorrangiger Bedeutung sein, und insbesondere ihr Einsatz bei Fragestellungen zur Marktsegmentierung erscheint sehr vorteilhaft, da diese Verfahren eine konsumententypologische Unterteilung des Gesamtmarktes ermöglichen[1]. Die praktische Berechnung von empirischen Daten unter Berücksichtigung persönlicher Urteilsstrukturen erfolgt neben dem INDSCAL-Programm mit den Programmen PREFMAP[2], MDPREF[3] und anderen.

---

1 Vgl. GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, a.a.O., S. 49-77; RITCHIE, J.R.B.: The identification of market segments through the application of an individual differences multidimensional scaling model, Diss., University of Western Ontario 1972.

2 GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, a.a.O., S. 214 ff.

3 Ebenda, S. 212.

8 SPEZIELLE PROBLEME BEI DER PRAKTISCHEN ANWENDUNG DER MDS IN DER MARKTFORSCHUNG

8.1 Anzahl und Art der zu untersuchenden Objekte

Grundsätzlich müssen vor Beginn der Anwendung der MDS die Beurteilungsgegenstände (Objektset, Stimuli) hinsichtlich Umfang und Inhalt festgelegt werden.

Die Bestimmung des q u a n t i t a t i v e n Objektumfangs n ist ein rechentechnisches Problem. Die Anzahl der zu skalierenden Objekte muß eine genaue Lösung garantieren. Da sich die Genauigkeit mit zunehmendem n erhöht, ist unter diesem Gesichtspunkt n möglichst groß zu wählen. Die Computerprogramme[1] verarbeiten maximal Ähnlichkeits- oder Präferenzdaten von 80 Objekten.

Computerprogramm	maximale Objektanzahl
TRICON	15
M - D - SCAL III	75
SSA - I	60
TORSCA 8	75
MINISSA	80
INDSCAL	.) [2]

Bei praktischen Anwendungen wird die Obergrenze von n nicht durch die Programme limitiert, sondern durch die zumutbare Belastung der Vpn bei der Datenerhebung. Je nach Datengenerierungsverfahren wächst die Anzahl der von den Auskunftspersonen abzugebenden Urteile über die Objekte überproportional. Für die Untergrenze des Objekt-

---

1 GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, a.a.O., S. 141 ff.; GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, a.a.O., S. 181 ff.

2 Die maximale Anzahl der Objekte ist von der Anzahl der Vpn abhängig.

umfangs sind in der Literatur einige Faustregeln vorgeschlagen worden. SHERMAN[1] empfiehlt bei zweidimensionaler Darstellung einen Objektumfang von $n \geq 10$ und bei drei Dimensionen soll $n \geq 15$ sein. Ein anderer Vorschlag besagt, daß der aus Objektanzahl n und Dimensionenzahl r gebildete Quotient $n/3 = 3$ sein soll. Für praktische Berechnungen empfiehlt es sich also insbesondere dann, wenn man direkte Verfahren zur Berechnung der Ähnlichkeitswerte[2] anwendet, mindestens 6 und höchstens 15 Objekte gleichzeitig zu skalieren.

Die q u a l i t a t i v e Auswahl der Objekte ist vom Untersuchungsziel abhängig. Die Untersuchungsobjekte müssen keinesfalls immer Produkte einer Produktklasse sein. Bei den Objekten, d.h. bei den Punkten der Konfiguration kann es sich handeln um Produktmodifikationen, Surrogate, Konsumsituationen, Produkteigenschaften, Käuferstereotypen, u.U. Produkte anderer Produktklassen usw.Bei der Auswahl des relevanten Objektsets müssen Marketingexperten hinzugezogen werden, um deren Erfahrungen einbauen und bereits bestehende Informationen berücksichtigen zu können. Exemplarisch sei hier auf drei Studien verwiesen:

Bei der Produktpositionierung von Fertigsuppen[3] gehen in das Objektset sowohl artverwandte als auch Produkte anderer Produktklassen ein. Es werden neben verschiedenen Fertigsuppenmarken, -geschmacksrichtungen, -verpackungsformen auch potentielle Surrogate wie Salate, Tiefkühlkost, Diätprodukte und andere Fertiggerichte in die Untersuchung einbezogen. Außerdem empfiehlt sich eine Analyse darüber, zu welcher Gelegenheit die Speisen verbraucht werden (Konsum bei Gästebewirtung, an Wochenenden, auf Reisen, beim Picknick usw.)

---

1 SHERMAN, C.R.: Nonmetric multidimensional scaling: A Monte Carlo study of the basic parameters, in: Psychometrika, Vol. 37 (1972), S. 323-355, hier S. 353.

2 Vgl. Abschnitt 4.1 und 8.2 dieser Arbeit.

3 WIND, Y. und ROBINSON, P.J.: Product positioning: An application of multidimensional scaling, paper prepared for the fourth Attitude Research Conference of the American Marketing Association, St. Thomas, October 30, 1971, S. 1-19, hier S. 3.

Ein weiteres Beispiel[1] umfaßte im Rahmen einer umfassenden Produktbeschreibung von Sportwagen drei Teilsets:

1. Produkte (Mercedes 350 SL, Porsche 911 T usw.),
2. Produkteigenschaften (niedriger Anschaffungswert, einfache Ersatzteilbeschaffung usw.),
3. Käuferstereotypen (Bastler, Rallyeenthusiast usw.).

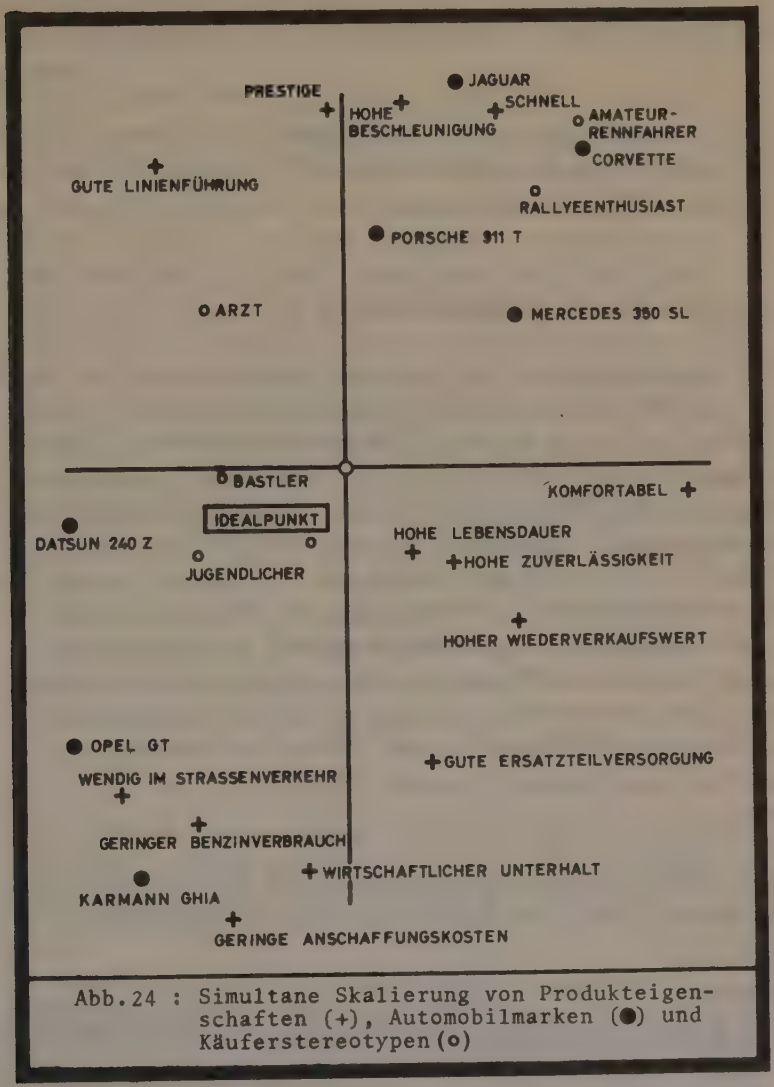


Abb.24 : Simultane Skalierung von Produkteigenschaften (+), Automobilmarken (●) und Käuferstereotypen (o)

Quelle: GREEN, P.E.: Multidimensional model of product-features association. Reprint of Journal of Business Research, o.Zeit, S.107-118, hier S.113.

---

1 GREEN, P.E.: Multidimensional model of product-features association, a.a.O., S.107-118.

Die mehrdimensionale Skalierung ergab eine zweidimensionale Punktekonfiguration, wie sie in Abb. 24 dargestellt ist. Ein anderer Ansatz[1] skalierte gleichzeitig verschiedene Produktklassen. Es wurden zugleich Automobilmarken, Zeitschriften und Berufe in einem Koordinatensystem dargestellt.

Dieser Abschnitt soll zeigen, daß die MDS-Verfahren nur dann sinnvoll eingesetzt werden können, wenn es gelingt, eine geeignete Selektion der Objekte in quantitativer und qualitativer Sicht zu garantieren.

8.2 Möglichkeiten der Datenerhebung

Die mehrdimensionalen Skalierungstechniken produzieren aus den vorgegebenen Distanzen zwischen Objektpaaren die Konfiguration der Punkte im Raum. Die Vorgehensweise bei der Datenerhebung ist abhängig von der Art und vom gewünschten Skalenniveau der Ausgangsdaten. Für Ähnlichkeits-[2] und Präferenzdaten[3], dargestellt in Form von metrischen bzw. nichtmetrischen Distanzen, empfehlen sich spezielle oder modifizierte Methoden zur Gewinnung der Daten. Außerdem ist die Auswahl einer geeigneten Methode zur Ermittlung der Distanzmatrix abhängig von dem verfolgten Skalierungszweck, dem vertretbaren Erhebungsaufwand in finanzieller und zeitlicher Sicht, der Anzahl der zu skalierenden Objekte und nicht zuletzt von der zumutbaren Belastung der Vpn.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf solche Datensammlungsmethoden, die eine ordinale Ähnlichkeitsmatrix

---

1 GREEN, P.E., WIND, Y. und JAIN, A.K.: A note on measurement of social-psychological belief systems, in: Journal of Marketing Research, Vol. IX (May 1972), S.204-208.

2 GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis,a.a.O., S. 42-70, hier S. 53 ff.

3 Ebenda, S. 71-96, hier S. 84 ff.

produzieren. Eine derartige Beschränkung ist deshalb sinnvoll, da analoge oder leicht modifizierte Vorgehensweisen für metrische bzw. Präferenzdaten denkbar sind. Ein weiterer Grund liegt darin, daß diese Methoden die größte Praxisrelevanz besitzen. Am bekanntesten sind die Methode der vollständigen Rangordnung, der Triadenvergleich und die Ankerreizmethode[1].

Die Methode der v o l l s t ä n d i g e n R a n g o r d n u n g von Paaren stellt an die Vp relativ hohe Anforderungen, besonders wenn der Objektumfang n groß ist. Bei praktischen Untersuchungen wird der Vp ein Kartenstapel vorgelegt. Auf jeder der $\binom{n}{2}$ Karten steht eine bestimmte Paarkombination geschrieben. So soll z.B. eine Vp die n = 5 Autotypen (A, B, C, D und E) beurteilen. Die Vp hat nun die Karten so zu sortieren, daß die Karte mit dem ähnlichsten Objektpaar, d.h. die beiden ähnlichsten Autos am Anfang und die Karte mit den beiden unterschiedlichsten Autotypen am Ende des geordneten Stapels liegen. Es lassen sich dann den einzelnen Zweierkombinationen Rangwerte der Ähnlichkeit zuordnen, und somit kann eine ordinale Distanzmatrix aufgestellt werden[2].

	A	B	C	D	E
A	-	6	4	5	3
B		-	9	2	1
C			-	8	10
D				-	7
E					-

Der Vorteil dieses Datenerhebungsverfahrens ist der, daß die erhaltene Matrix direkt als Input für ein nichtmetrisches MDS-Programm dienen kann. Mit zunehmendem n wird dieses Ver-

---

1 Vgl. GREENBERG, M.G.: Some applications of nonmetric multidimensional scaling, in: Proceedings of the 129th Annual Meeting of the American Statistical Association (1969), S. 104-109; AHRENS, H.J.: Multidimensionale Skalierung, a.a.O., S. 92 ff.

2 Vgl. z.B. bei KLAHR, D.: A study of consumer's cognitive structure for cigarette brands, in: Journal of Business, Vol. 44 (1971), S. 190-204.

fahren allerdings für die Vp immer unzumutbarer, da die Anzahl der von der Vp abzugebenden Urteile über die Objektpaare überproportional zur Anzahl der Beurteilungsgegenstände n wächst.

Diesen Nachteil versucht der sog. T r i a d e n v e r g l e i c h [1] möglichst abzubauen, indem der Vp nicht mehr die Gesamtheit der Objektpaare, sondern nur noch sämtliche Dreierkombinationen von Objekten (Triaden) nacheinander zur Beurteilung hinsichtlich der Ähnlichkeit vorgelegt werden. So werden aus den n Objekten (fünf Autotypen A, B, C, D und E) der Vp jeweils drei, z.B. A, B und C vorgegeben, und sie muß entscheiden, welches das 'ähnlichste' und welches das 'unähnlichste' Autopaar von diesen dreien ist. Ein mögliches Ergebnis wäre:

Paar AB ist 'das ähnlichste',
Paar BC ist 'das unähnlichste'.

Durch die zwei Urteile lassen sich drei Beziehungen ableiten:

Auto A ist Auto B ähnlicher als Auto C,
Auto B ist Auto A ähnlicher als Auto C,
Auto C ist Auto A ähnlicher als Auto B.

Diese Entscheidung einer Vp kann man in einer Dominanzmatrix darstellen. Sie wird über alle Vpn zusammengefaßt, und daraus wird die Prozentmatrix abgeleitet, aus der man dann mit Hilfe einer z-Transformation eine Distanzmatrix berechnet. Da man davon ausgeht, daß derartige abgeleitete Distanzen nur Schätzwerte der 'wahren Distanzen' sind, werden sie nur auf ordinalskaliertem Niveau weiterverarbeitet. Das Objektpaar mit der kleinsten Distanz erhält eine Rangziffer '1', das mit der zweitkleinsten Distanz eine '2' usw.[2] Diese Matrix der Rangordnung dient dann als Input für das nichtmetrische MDS-Programm.

---

1 TORGERSON, W.S.: Theory and methods of scaling, a.a.O., S. 262 ff.

2 SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, a.a.O., S. 317 ff.

Das dritte Verfahren ist die A n k e r r e i z m e t h o d e[1]. Dabei werden alle n Objekte einmal als Bezugsreiz (Anker) gewählt, und den verbleibenden n-1 Beurteilungsgegenständen müssen Rangziffern 1,2,...,n-1 zugeordnet werden. So ergab sich z.B. folgende Matrix für eine Vp, die die Ähnlichkeit von fünf Autotypen beurteilen sollte:

	A	B	C	D	E
A	-	3	1	2	4
B	2	-	4	1	3
C	1	3	-	2	4
D	1	2	4	-	3
E	3	1	4	2	-

Die Elemente dieser Matrix sind folgendermaßen zu interpretieren: Es wird nur zeilenweise eine Rangordnung aufgestellt. Die erste Zeile zeigt an, daß die Vp Autotyp C als am ähnlichsten, D als am zweitähnlichsten im Vergleich zu A beurteilte usw. Die oben dargestellte Matrix läßt sich mit Hilfe der sog. Triangularisation[2] in eine Rangordnung sämtlicher Objektpaare überführen. Bei praktischen Berechnungen wird dazu das TRICON-Programm[3] benutzt. Es sollte allerdings bedacht werden, daß die Rechenzeit für diese Umwandlung pro Vp mit zunehmendem n stark wächst[4]. In Übersicht 10 sind die benötigten Rechenzeiten für alternative Objektumfänge n aufgeführt.

---

1 GREEN, P.E. und MAHESHWARI, A.: A note on the multidimensional scaling of conditional proximity data, in: JoMR, Vol. VII (Febr. 1970), S. 106-110.

2 Vgl. COOMBS, C.H.: A theory of data, a.a.O., S. 352 ff. u. S. 421 ff.; GULLIKSEN, H. und TUCKER, L.R.: An general procedure for obtaining paired comparisons from multiple rank orders, in: Psychometrika, Vol. 26, No. 2 (June 1961), S. 173-183.

3 GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, a.a.O., S. 182.

4 HENRY, W.A. und STUMPF, V.R.: Time and accuracy measures for alternative multidimensional scaling data collection methods, in: JoMR, Vol. XII (May 1975), S. 165-170, hier S. 169.

n	Rechenzeit pro Vp in Minuten
7	0,1
9	0,2
11	0,8
13	2,1
15	5,9 (!)

Übers.10: Rechenzeit des TRICON - programmes pro Vp bei alternativen Objekt-umfängen

Quelle: HENRY, W.A. und STUMPF, V.R.: Time and accuracy measures for alternative multi-dimensional scaling data collection methods, a.a.O., S. 169.

Beim V e r g l e i c h der Datenerhebungsverfahren ist es sinnvoll, die benötigte Zeit zum Erheben der Daten (d.h. Ausfüllen der Fragebögen) in Abhängigkeit von der Anzahl der Stimuli n zu berücksichtigen. Es wurde mit

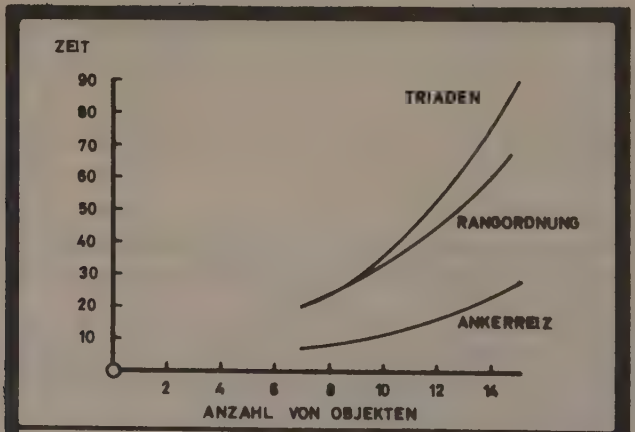


Abb. 25: Die Abhängigkeit zwischen der Erhebungszeit (in Min.) und der Anzahl der Objekte

Quelle: HENRY, W.A. und STUMPF, V.R.: Time and accuracy measures for alternative multi-dimensional scaling data collection methods, a.a.O., S. 169.

Hilfe eines regressionsanalytischen Ansatzes ein Zusammenhang gefunden, wie er in Abb. 25 dargestellt ist. Von den hier ausgewählten Verfahren ist die Ankerreizmethode vorzuziehen, da sie am schnellsten ist, die Vp-Belastung in Grenzen hält und zufriedenstellende Resultate[1] liefert. Die drei dargestellten Verfahren sind allerdings nur bei geringer Objektzahl anwendbar. Bei großem Objektumfang empfehlen sich spezielle Datensammlungsmethoden[2]. Die mehrdimensionale Skalierung erlaubt auch die Verarbeitung von Daten, die nicht speziell für diese Verfahren erhoben worden sind. Dazu müssen besondere Ähnlichkeitswerte[3] aus Verwechslungshäufigkeiten, Profil-, Assoziationsdaten usw. abgeleitet werden.

---

1 NEIDELL, L.A.: Procedures for obtaining similarities data, in: JoMR, Vol. IX (Aug. 1972), S. 335-337.

2 RAO, V.R. und KATZ, R.: Alternative multidimensional scaling methods for large stimulus sets, in: JoMR, Vol. VIII (Nov. 1971), S. 488-494; KRUSKAL, J.B.: Special problems and possibilities, Bell-Penn MDS-Workshop (unveröffentlicht), (June 1972), S. 5 ff.

3 GREEN, P.E. und RAO, V.R.: A note on proximity measures and cluster analysis, in: JoMR, Vol. VI (Aug. 1969), S. 359-364; GREEN, P.E., CARMONE, F.J. und ROBINSON, P.J.: A comparison of perceptual mapping via confusions data and direct similarity judgements, in: KING, R.L. (Hrsg.): Proceedings of the Denver Conference of the American Marketing Association, Chicago 1968, S. 323-334; vgl. HOLTMANN, D.: Multidimensionale Skalierung, Methode und ihre Anwendung in den Sozialwissenschaften, Diss., Köln 1974, S. 73 ff.; LUER, G., OSTERLOH, W. und RUGE, A.: Versuche zur multidimensionalen Skalierung von subjektiven Reizähnlichkeiten auf Grund von Schätzurteilen, Entscheidungszeiten und Verwechslungshäufigkeiten beim Wiedererkennen; in: Psychologische Forschung, Bd. 33 (1970), S. 223-241; WISH, M.: Notes on the variety, appropriateness und choice of proximity measures. Unveröffentlichtes Papier der Bell Laboratories, Murray Hill 1972, S. 1-26 mit Anhang. Vgl. Abschnitt 4.1 dieser Arbeit.

Die Auswirkungen sämtlicher denkbarer Datenerhebungsmethoden auf das Skalierungsergebnis sind noch nicht zufriedenstellend erforscht. Obwohl bereits einige Ansätze in dieser Richtung existieren[1], bleibt hier noch ein interessantes Arbeitsgebiet für zukünftige wissenschaftliche Forschungen.

8.3 Anzahl der Dimensionen und ihre Interpretation

Da es sich bei dem Output der MDS-Verfahren um Konfigurationen der Punkte im Raum handelt, muß die Dimensionenzahl r dieses Raumes bestimmt werden, die im wesentlichen von vier Kriterien abhängig ist[2].

(1) A n s c h a u l i c h k e i t : Für den Marketingpraktiker ist die dem menschlichen Auge zugängliche zwei- bis dreidimensionale räumliche Darstellung von vorrangiger Bedeutung. Man geht also davon aus, daß nicht mehr als drei Beurteilungsdimensionen in das Vp-Urteil einfließen.
(2) A n p a s s u n g s g ü t e : Bei den iterativen Verfahren ist ein Maß für die Anpassungsgüte (z.B. der sog. 'Stress') zwischen den Distanzen der Inputmatrix und den Distanzen der Endkonfiguration definiert. Normalerweise ist von vornherein nicht bekannt, wieviele Dimensionen zur Darstellung notwendig sind. Man stellt dann den 'Stress', den es zu minimieren gilt, und die Dimensionenzahl r gegenüber. Die Anzahl der Dimensionen r soll dann so gewählt

---

1 MOINPOUR, R.: An empirical investigation of multidimensional scaling and multidimensional unfolding to predict brand purchasing behavior, Diss., Ohio State University 1970, S. 57 ff.

2 Vgl. SHEPARD, R.N.: Introduction, unveröffentlichtes Papier des Multidimensional Workshop, University of Pennsylvania (June 1972), S. 1-11, hier S. 10; WISH, M.: Brief comments about dimensionality. Bell Laboratories, Murray Hill (unveröffentlicht), o. Zeitangabe, S. 1-4, hier S. 2 ff.; KRUSKAL, J.B.: Special problems and possibilities, a.a.O., S. 1-12, hier S.7.

gewählt werden, daß der Stress bei Hinzufügen einer weiteren Dimension nur geringfügig verringert wird. Typisch ist ein Zusammenhang, wie ihn Abb. 26 wiedergibt.

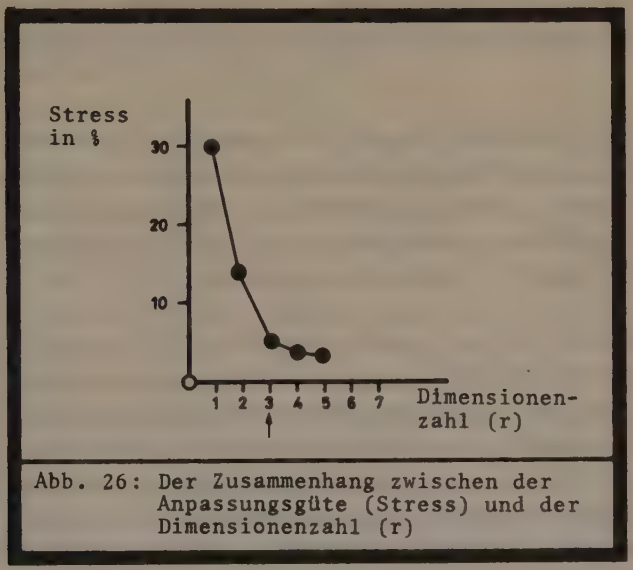


Abb. 26: Der Zusammenhang zwischen der Anpassungsgüte (Stress) und der Dimensionenzahl (r)

Meist ergibt sich in der Stresskurve eine Knickstelle ('elbow'). Die dazugehörige Größe r an dieser Stelle wird als ausreichend angesehen[1] (hier: r=3).

(3) S t a t i s t i s c h e G ü l t i g k e i t :

Ob und inwieweit es sich bei der festgelegten Dimensionenzahl und der damit verbundenen Konfiguration um eine 'wahre' Darstellung handelt, kann durch verschiedene Tests überprüft werden. So werden auf denselben Input-Datensatz verschiedene Computerprogramme angewandt. Oder es werden verschiedene Startdaten für den iterativen Anpassungs-

---

1 Vgl. Abschnitt 6.4 dieser Arbeit.

prozeß gewählt. Man kann auch bei genügend großer Objektanzahl nur 2/3 oder die Hälfte der Elemente der Distanzmatrizen zufällig auswählen und diesen unvollständigen Datensatz separat skalieren. Bestätigen all diese zusätzlichen mehrdimensionalen Skalierungen dieselbe Konfiguration in einem festgelegten dimensionierten Raum, so kann das ein Hinweis auf eine richtig dimensionierte Lösung sein.

(4) I n t e r p r e t a t i o n s m ö g l i c h k e i t: Die Dimensionenzahl muß so gewählt werden, daß die mathematisch ermittelten Achsen inhaltlich interpretiert werden können. Wie eine solche Interpretation der Punktekonfiguration durchgeführt werden kann, zeigen verschiedene Verfahren, die nun näher erläutert werden sollen.

"Die .. I n t e r p r e t i e r b a r k e i t ist als sinnvolle Voraussetzung dafür anzusehen, daß ein MDS-Modell über ein rein deskriptives Hilfsmittel hinaus auch als Erklärungskonzept für empirisch erfaßbare Relationen eines psychologischen Gegenstandsbereichs verwendbar sein kann."[1] In der Ähnlichkeits- (bzw. Distanz-) matrix ist eine bestimmte räumliche Struktur der Objekte verborgen. Die Achsen dieses Raums können relativ willkürlich in die Konfiguration gelegt werden, ohne daß der Abstand, der hier als 'Luftlinie' zwischen zwei Punkten angesehen wird, sich verändert. Daher ist die Drehung der Achsen ein beliebtes Hilfsmittel, um eine sinnvolle Interpretation der Dimensionen[2] zu ermöglichen. Es sind zwar auch Fälle

1 AHRENS, H.J.: Multidimensionale Skalierung, a.a.O., S.21.

2 Vgl. SHEPARD , R.N.: A taxonomy of some principal types of data and of multidimensional methods for their analysis, in: SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B. (Hrsg.) : Multidimensional scaling, Vol. I, a.a.O., S. 21-47, hier S. 39 ff.; GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, a.a.O., S. 57 ff. und S.130 f.; AHRENS, H.J.: Multidimensionale Skalierung, a.a.O., S. 110.

denkbar, bei denen ein fruchtbarer Einsatz der MDS-Verfahren ohne inhaltliche Dimensionsbestimmung auskommt[1], in der Regel wird bei Marketingfragestellungen die Schwierigkeit der Interpretation der Dimensionen aber kaum zu umgehen sein. Diese Problematik ist mit der Interpretation der Faktoren in der Faktorenanalyse vergleichbar. Bei den MDS-Techniken unterscheidet man zwei Vorgehensweisen zur Dimensionsbeschreibung, nämlich die interne und die externe Analyse.

Die i n t e r n e Analyse basiert nur auf den Daten der Distanzmatrix, der daraus produzierten Konfiguration und der Interpretation durch die Experten und/oder die Vpn. So werden z.B. Objekte in die Skalierung zusätzlich aufgenommen, deren relevante Beurteilungsdimensionen man bereits kennt. Im Rahmen einer Analyse der Wahrnehmung von 5 Automobiltypen A, B, C, D und E werden außerdem zwei weitere Autos X und Y einbezogen. X ist bekannt als ausgesprochen exklusives Auto mit hohem Prestigewert und Y als Prototyp eines Billigautos. Durch Analyse der Lage der anderen Automobile zu X und Y, deren relevante Merkmalsausprägungen in etwa bereits bekannt sind, ist es u.U. möglich, das Ergebnis zu interpretieren. Außerdem wird z.B. versucht, durch Rotation und/oder Verschiebung der Achsen einen interpretierbaren Raum zu erhalten. Bei mehr als dreidimensionaler Darstellung empfiehlt sich als zusätzliche Hilfe eine Clusteranalyse[2], und es wird überlegt, was benachbarten Punkten (Cluster) gemein ist.

Bestehen neben der Distanzmatrix noch zusätzliche Informationen, außer der Expertenerfahrung, so wird eine e x t e r n e Analyse vorgenommen. Diese Vorgehensweise ist dadurch gekennzeichnet, daß separate Erhebungen über bestimmte vermeint-

---

1 Vgl. Abschnitt 9.3 dieser Arbeit.

2 KRUSKAL, J.B.: Relationship of clustering to scaling and the interpretation of neighbourhood. Bell-Penn Workshop on Multidimensional Scaling (unveröffentlicht), (June 1972), S. 1-8.

liche Beurteilungsdimensionen durchgeführt werden. Mit Hilfe dieser Daten werden Achsen (Eigenschaftsvektoren) und Idealpunkte in die Konfiguration gelegt, um sie besser interpretieren zu können.
Die Bestimmung der Lage der Eigenschaftsvektoren soll an einem Beispiel näher erläutert werden. Mit Hilfe der MDS ist eine Konfiguration für fünf Autotypen verschiedener Größe (A, B, C, D und E) im zweidimensionalen Raum gefunden worden. Die Vpn werden nun nach den für sie wichtigen Eigenschaften eines Autos befragt. Sie äußern: 'Wirtschaftlichkeit, Prestige, Bequemlichkeit, Platzangebot' usw. Diese Charakteristika dienen dann als eindimensionale Eigenschaftsskalen, die der Vp nochmals vorgelegt werden. Die Vp soll nun ordinale Urteile über die einzelnen Autos hinsichtlich einer bestimmten Eigenschaft abgeben. So ergibt sich z.B. nach dem Kriterium der 'Wirtschaftlichkeit' die Rangordnung: A>B>C>D>E (lies:A ist wirtschaftlicher als B usw.). Mit Hilfe verschiedener Verfahren werden diese Eigenschaften als Vektoren im MDS-Output dargestellt, wie Abb. 27 veranschaulicht.

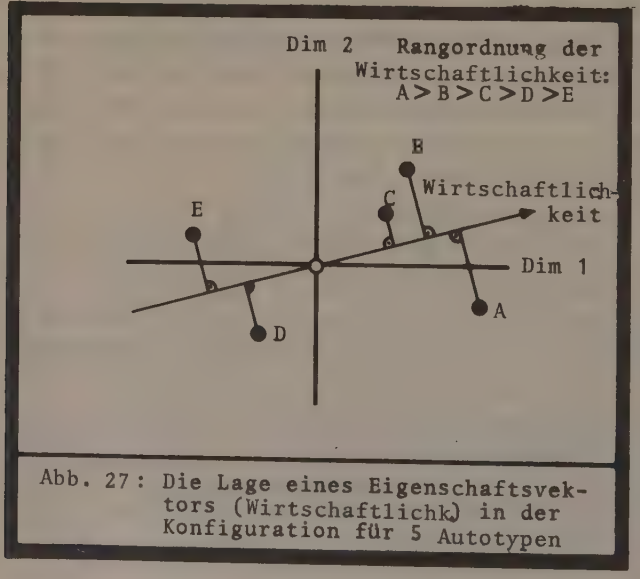


Abb. 27: Die Lage eines Eigenschaftsvektors (Wirtschaftlichk) in der Konfiguration für 5 Autotypen

Verfahren zur Bestimmung der Richtung dieser Vektoren sind lineare Korrelation[1], monotone multiple Regression[2] und nichtlineare Korrelation[3]. Die Anzahl der Eigenschaftsvektoren ist beliebig. Die Eigenschaften derjenigen Vektoren, die ungefähr mit den Koordinatenachsen übereinstimmen und einen hohen Korrelationskoeffizienten besitzen, geben einen Hinweis darauf, wie die Achsen zu interpretieren sind.

Wie diese Ansätze zeigen, gibt es mehrere Möglichkeiten zur Interpretation der Dimensionen. Es muß festgestellt werden, daß die inhaltliche Bestimmung der Achsen im Rahmen einer internen Analyse subjektiv beeinflußt ist. Daher ist die externe Analyse vorzuziehen, was allerdings eine Erhöhung des Erhebungsaufwandes bedeutet. Trotz dieser Schwierigkeiten bei der Interpretation des MDS-Outputs besitzen diese Verfahren ihre Berechtigung[4].

---

1 MILLER, J.E., SHEPARD, R.N. und CHANG, J.J.: An analytical approach to the interpretation of multidimensional scaling solutions, in: American Psychologist, Vol. 19 (1964), S. 579-580.

2 CARROLL, J.D. und CHANG, J.J.: A general index of nonlinear correlation and its application to the interpretation of multidimensional scaling solutions, a.a.O., S. 540.

3 CARROLL, J.D.: Individual differences and multidimensional scaling, a.a.O., S. 105-155.

4 Vgl. Abschnitt 9.2 dieser Arbeit.

9 EXEMPLARISCHE DARSTELLUNG VERSCHIEDENER ANWENDUNGSBEREICHE DER MDS IN DER MARKTFORSCHUNG

9.1 Die Anwendung von MDS-Techniken im Marketing

Wie GREEN[1] ausführt, haben Marketingpraktiker den Meßtechniken der Verhaltenswissenschaftler in der Vergangenheit nur wenig Vertrauen entgegengebracht. Neuerdings werden MDS-Verfahren aber zunehmend eingesetzt. In der Literatur wird häufig ein spekulativer Ausblick auf potentielle Anwendungsmöglichkeiten gegeben[2]. Dabei werden Marktsegmentierungs-, Produktlebenszyklus-, Werbewirkungs-, Markenwechsel-, Imageanalysen usw. genannt. Vom heutigen Standpunkt aus gesehen handelt es sich bei diesen Anwendungsgebieten teilweise bereits um Bereiche, über die schon praktische Erfahrungen vorliegen. Die MDS-Verfahren werden dabei als diagnostisches Hilfsinstrument zur Beantwortung folgender typischer Fragen benutzt[3]:

- Welches sind die wesentlichen Beurteilungsdimensionen der Verbraucher für die Produktgruppe?
- Welche Produkte werden mit welchen anderen Produkten ähnlich wahrgenommen?
- Wo liegen die Idealpunkte der Konsumenten im Wahrnehmungsraum?
- Wie wirken sich verschiedene Werbebotschaften, -slogans oder andere Werbeaktivitäten auf die Markenwahrnehmung aus?

---

1 GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Marketing research applications of non-metric scaling methods, in: Operations Research Quarterly - Special Conference Issue, Vol. 21 (1973), S. 73-96, hier S. 73.

2 GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Marketing research applications of non-metric scaling methods, a.a.O. S. 74 ff; GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing-analysis, a.a.O., S. 15 ff.; GREEN, P.E. und TULL,D.S.: Research for marketing decisions, a.a.O., S. 238 ff.

3 GREEN, P.E.: Marketing applications of MDS: Assesment and outlook, Working paper, University of Pennsylvania, revised (July 1974), S. 1-25, hier S. 11.

Der Fragenkatalog ließe sich beliebig erweitern. Er zeigt etwa das breite Anwendungsfeld der MDS an. Die vollständige Beschreibung sämtlicher denkbarer Problemstellungen und ihre Lösung mit Hilfe der MDS würde den hier gesteckten Rahmen sprengen. Daher werden drei wesentliche Bereiche exemplarisch dargestellt. Es handelt sich dabei um die Imageanalyse, die Produktpositionierung und die Marktsegmentierung.

9.2 Imageanalyse

Von wesentlicher Bedeutung im Rahmen der Imageanalyse ist nicht die objektive Beschaffenheit eines Meinungsgegenstandes (z.B. Produkt), sondern die subjektive Vorstellung der Konsumenten[1]. Das I m a g e wird als das gesamte Gefüge der Vorstellungen, Eindrücke, Meinungen, Stereotypen usw. definiert[2], und jede Information über das Objekt ist imagerelevant. Die Bedeutung des Image liegt in seiner verhaltenssteuernden Wirkung auf den Konsumenten. Das Ziel der Untersuchung derartiger Vorstellungen ist die psychologische Markterkundung, insbesondere quasi-homogener Produkte. Solche Produkte (z.B. Biermarken, Benzin, Zahnpasten, Zigaretten usw.) haben heutzutage einen Qualitätsstandard erreicht, der sie hinsichtlich ihrer physikalischen Eigenschaften kaum unterscheidbar macht. Für den Erfolg am Markt ist das firmen- bzw. produktspezifische Image entscheidend. Die MDS-Verfahren bieten sich bei der Imageanalyse zur Lösung folgender Problemkreise an[3]:

- Welches Image besitzen die Konkurrenzprodukte?
- Welches Image besitzt das eigene Produkt und welches wäre wünschenswert?
- Wie wirken sich bestimmte Aktivitäten auf die imagemäßige Struktur der hauseigenen Produkte aus?

---

1 JOHANNSEN, U: Das Marken- und Firmenimage. Theorie, Methodik, Praxis, Diss., Braunschweig 1968, Betriebswirtschaftliche Schriftenreihe, Heft 46, Berlin 1971.

2 NIESCHLAG, R., DICHTL, E. und HOERSCHGEN, H.: Marketing, a.a.O., S. 385 ff.

3 Vgl. FRY, J.N. und CLAXTON, J.D.: Semantic differential und nonmetric multidimensional scaling descriptions of brand images, in: JoMR, Vol. VIII (May 1971) S. 238-240; DILLER, H. und SCHOBERT, R.: Räumliche Repräsentation durch nicht-metrische mehrdimensionale Skalierung, a.a.O.

Als Beispiel für eine Imageanalyse mit Hilfe mehrdimensionaler Skalierungen soll die imagemäßige Struktur deutscher Publikumszeitschriften überprüft werden. In der Vergangenheit ist versucht worden, mit faktorenanalytischen Methoden die Positionierung von Zeitschriften im Imageraum zu beschreiben[1]. Hier soll auf diese Daten zurückgegriffen werden, da sie auf einem ausreichenden Stichprobenumfang beruhen und da die MDS-Ergebnisse dann mit denjenigen der Faktorenanalyse verglichen werden können. Eine Beschreibung des Image mit Hilfe der MDS ist außerdem deshalb sinnvoll, da sowohl für den Anzeigenauftraggeber als auch für den Zeitschriftenverleger Informationen beschafft werden können:

- Für den Anzeigenauftraggeber ist es wichtig zu wissen, welchen Eindruck die Leser von den einzelnen Zeitschriften haben, da die Images der Illustrierten auch in die Markenbilder derjenigen Produkte einfließen, für die in den Zeitschriften geworben wird.
- Für den Verleger ergibt sich nach Erkennen der Images der Hauszeitschriften im Vergleich zu anderen Titeln die Möglichkeit, durch gezielte Werbeaktivitäten und/oder Änderung des redaktionellen Teils seine Blätter neu im Imageraum zu positionieren. Dadurch können u.U. auflagestärkere Segmente angesprochen werden.

Mit Hilfe der mehrdimensionalen Skalierung soll analysiert werden,

- wie die einzelnen Zeitschriften im Imageraum positioniert sind,
- aus wievielen Dimensionen dieser Imageraum besteht,
- wie diese Dimensionen inhaltlich zu umschreiben sind,
- ob sich eventuell Zeitschriftengruppen in Form von Punktewolken ergeben,
- welche Zeitschriften für den Inserenten am interessantesten sind,
- ob vielleicht einige Marktlücken sichtbar werden, was für den Verleger von Interesse sein kann
- und wie sich die MDS-Lösung von dem Faktorenanalyseergebnis unterscheidet.

---

1 o.VERFASSER: Zeitschriften-Profile - Die Positionierung von Zeitschriften im Imageraum, Ergebnisse einer Untersuchung im Auftrage von HÖR ZU und FUNKUHR, o. Ortsangabe, Juni 1975.

In die Datenerhebung wurden die folgenden 26 deutschen Publikumszeitschriften, die sich in fünf Gruppen aufteilen lassen, einbezogen:

1. Programmzeitschriften:

   BILD UND FUNK
   FERNSEHWOCHE
   FUNKUHR
   GONG
   HÖR ZU
   TV HÖREN UND SEHEN

2. Frauenzeitschriften

   BRIGITTE
   BURDA MODEN
   DAS NEUE BLATT
   FRAU IM SPIEGEL
   FÜR SIE
   NEUE POST

3. Männerzeitschriften:

   ADAC MOTOR WELT
   AUTO MOTOR UND SPORT
   KICKER

4. Aktuelle Illustrierte:

   BUNTE
   NEUE REVUE
   QUICK
   STERN

5. Sonstige:

   BRAVO
   DAS BESTE
   DER SPIEGEL
   ELTERN
   PRALINE
   WOCHENEND
   SCHÖNER WOHNEN

Insgesamt wurden 5881 Personen, die einen Querschnitt der Gesamtbevölkerung im Bundesgebiet (einschl. West-Berlin) zwischen 14 und 69 Jahren bildeten, nach ihrer Meinung zu den obengenannten Zeitschriften befragt. Der Erhebungszeitraum lag zwischen Dezember 1973 und Mai 1974. Die Zeitschriften sollten mittels 20 bipolarer Eigenschaften, wie z.B. einseitig-vielseitig, übersichtlich-unübersichtlich usw., in eine 6 Punkte-Skala, die von + 3 bis - 3 reichte, eingeordnet werden. Jede Vp konnte

sich eine Zeitschrift zur Beurteilung aussuchen, so "daß jeder Titel eine der Größe seines Leserkreises proportionale Chance hatte ... ausgewählt zu werden"[1]. So urteilte z.B. eine Vp, wie es in Übersicht 11 dargestellt ist.

Auswahlzeitschrift:

Zeitschriften-Name einschreiben STERN

	+3	+2	+1	-1	-2	-3	
einseitig					X		vielseitig
übersichtlich			X				unübersichtl.
eintönig				X			lebendig
unterhaltend		X					langweilig
lebensnah			X				lebensfremd
solide				X			unsolide
erregend			X				beruhigend
erfahren		X					unerfahren
männlich			X				weiblich
deutsch			X				ausländisch
politisch			X				unpolitisch
veränderlich				X			beständig
hart		X					sanft
vertraut	X						fremd
verworren				X			klar
sachlich			X				unsachlich
zuverlässig				X			unzuverlässig
ernsthaft		X					verspielt
modern		X					traditionell
gespannt			X				entspannt
	+3	+2	+1	-1	-2	-3	

Übers. 11: Fragebogenseite zur Erhebung von Imageprofilen für Zeitschriften

1 o. VERFASSER: Zeitschriften-Profile - Die Positionierung von Zeitschriften im Imageraum, a.a.O. , S. 30. Eine derartige Auswahlmethode für die Beurteilung von Zeitschriften ist zweifellos nicht ohne Schwächen, weil z.B. negative Imagefaktoren wegen der positiven Grundeinstellung des Lesers zu 'seiner' Zeitschrift nur bedingt erfaßt werden und weil die statistische Aussagekraft der Daten wegen des unterschiedlichen Stichprobenumfangs für jede Zeitschrift begrenzt ist.

Durch Aggregation der einzelnen Vp-Urteile ergab sich dann ein sog. Imageprofil, welches die Skalenwerte für sämtliche 26 Zeitschriften hinsichtlich der 20 untersuchten Eigenschaften wiedergibt, wie Übers. 12 verdeutlicht.

Um nun die MDS-Techniken einsetzen zu können, muß aus diesem Imageprofil für jedes Zeitschriftenpaar ein Unähnlichkeitswert ermittelt werden[1]. Interpretiert man die einzelnen Eigenschaften als Dimensionen, so können die Profildaten normiert werden, wie an anderer Stelle der Arbeit[2] bereits dargestellt worden ist. Mit Hilfe der MINKOWSKI-Metrik[3] läßt sich anschließend ein Distanzwert für jedes Zeitschriftenpaar ermitteln, welcher als Unähnlichkeitswert interpretiert wird. In diesem Fall wurde mit der EUKLIDischen Metrik eine Unähnlichkeits(Distanz)-matrix ermittelt, die direkt als Input diente für eine nichtmetrische mehrdimensionale Skalierung mit Hilfe des MINISSA-Computerprogramms[4]. Als Output lieferte das Programm eine zweidimensionale Konfiguration der Zeitschriften im Raum. Die Berechnungen wurden mehrmals wiederholt, wobei immer mit einer anderen Startkonfiguration gearbeitet wurde, um eine suboptimale Lösung auszuschließen. Es ergab sich im zweidimensionalen Raum eine Lösung mit einer Anpassungsgüte S_1 = 14,9 %. Obwohl eine dreidimensionale Lösung einen niedrigeren Stresswert besaß, soll hier aus Gründen der Anschaulichkeit nur die zweidimensionale Lösung vorgestellt werden, deren Stresshöhe bei der relativ hohen Objektanzahl von 26 Zeitschriften nach WAGENAAR und PADMOS durchaus noch annehmbar ist[5]. Diese Konfiguration ist in Abb. 28 dargestellt.

---

1 Vgl. Kapitel 4 dieser Arbeit.

2 Vgl. Abschnitt 6.2 dieser Arbeit.

3 Vgl. Abschnitt 4.2 dieser Arbeit.

4 ROSKAM, E. und LINGOES, J.C.: MINISSA - I: A FORTRAN IV (G) program for the smallest space analysis of square symmetric matrices, in: Behavioral science, Vol. 15 (March 1970), S. 204-205.

5 WAGENAAR, W.A. und PADMOS, P: Quantitative interpretation of stress in KRUSKAL's multidimensional scaling technique, a.a.O., S. 109.

Imageprofil

Die von ihnen gelesene Zeitschrift erleben so:		Stern	Quick	Bunte Illustr.	Neue Revue	HÖRZU	TV Hören und Sehen	Funk Uhr	Gong	Fernsehwoche	Bild und Funk	Brigitte	Burda Moden	Frau im Spiegel
+	−													
einseitig	vielseitig	−2,16	−1,88	−2,06	−1,78	−1,76	−1,72	−1,18	−1,56	−1,31	−2,16	−1,95	−1,52	−1,89
übersichtlich	unübersichtlich	1,78	1,75	1,83	1,22	2,13	2,17	2,20	1,90	2,18	2,11	1,94	2,07	1,96
eintönig	lebendig	−2,24	−1,69	−2,04	−1,77	−1,75	−1,75	−1,15	−1,53	−1,51	−1,67	−2,05	−1,79	−2,00
unterhaltend	langweilig	2,34	2,23	2,40	1,94	2,19	2,12	1,88	1,94	1,84	2,24	2,44	2,02	2,39
lebensnah	lebensfremd	2,10	1,83	1,93	1,32	1,97	1,88	1,73	1,60	1,47	1,79	2,13	1,84	1,85
solide	unsolide	1,49	1,16	2,00	0,49	2,30	2,16	2,16	2,01	2,10	2,07	2,22	2,37	2,02
erregend	beruhigend	0,95	0,70	−0,74	0,77	−0,92	−1,08	−1,29	−0,60	−0,50	−0,89	−0,80	−1,42	−0,98
erfahren	unerfahren	2,05	1,92	1,96	1,53	2,09	1,93	1,70	1,51	1,73	1,76	1,99	2,14	1,88
männlich	weiblich	1,04	0,59	−0,32	0,13	0,05	−0,26	−0,53	0,00	−0,18	−0,47	−2,54	−2,52	−2,42
deutsch	ausländisch	1,94	1,82	2,02	1,75	2,19	2,31	2,39	1,98	1,91	2,03	2,17	2,29	1,94
politisch	unpolitisch	1,84	0,85	−0,53	−0,71	−1,64	−1,80	−2,13	−1,49	−1,76	−1,85	−2,02	−2,65	−2,38
veränderlich	beständig	−0,52	−0,67	−0,76	−0,65	−1,32	−1,49	−1,38	−1,29	−1,27	−1,75	−0,94	−1,37	−1,18
hart	sanft	1,23	0,93	−0,52	0,35	−0,98	−1,25	−1,40	−0,91	−1,16	−1,05	−1,69	−2,03	−1,67
vertraut	fremd	1,74	1,60	1,84	1,40	2,12	2,14	2,04	1,95	1,77	1,94	2,15	2,31	2,15
verworren	klar	−1,69	−1,51	−1,74	−1,44	−2,09	−2,21	−2,24	−1,81	−1,71	−1,63	−2,09	−2,18	−1,78
sachlich	unsachlich	1,79	1,45	1,71	1,01	2,14	2,05	2,39	1,94	1,88	1,77	2,00	2,16	1,85
zuverlässig	unzuverlässig	1,77	1,39	1,88	1,23	2,31	2,30	2,22	1,93	1,73	1,84	2,23	2,15	1,81
ernsthaft	verspielt	1,85	1,31	1,32	0,35	1,28	1,24	0,99	1,07	0,61	0,79	0,50	0,66	0,38
modern	traditionell	1,67	1,62	1,19	1,67	1,32	0,94	1,26	0,56	1,17	1,16	2,37	1,60	0,27
gespannt	entspannt	0,74	0,39	−0,55	−0,02	−0,44	1,08	−0,63	−0,70	−0,54	−0,69	−0,85	−0,84	−0,83

		Für Sie	Neue Post	Das Neue Blatt	Praline	Wochenend	Der Spiegel	Das Beste	Eltern	Schöner Wohnen	Bravo	ADAC Motorwelt	Kicker	Auto Motor Sport
+	−													
einseitig	vielseitig	−1,83	−1,76	−1,98	−2,02	−0,89	−1,94	−2,17	−1,91	−1,34	−2,12	−1,28	−1,67	−0,79
übersichtlich	unübersichtlich	1,60	1,90	1,66	1,93	1,75	1,89	2,05	2,07	1,90	1,46	1,96	2,34	2,19
eintönig	lebendig	−1,78	−2,10	−1,60	−2,39	−1,15	−2,20	−2,19	−2,29	−1,59	−2,42	−1,83	−2,45	−1,63
unterhaltend	langweilig	1,83	2,27	2,28	2,39	1,76	1,97	2,41	2,34	1,93	2,31	1,55	2,40	1,93
lebensnah	lebensfremd	1,70	1,85	1,85	2,05	1,49	2,43	2,23	2,60	1,70	1,80	2,15	2,18	1,96
solide	unsolide	2,42	2,13	2,36	0,66	0,04	1,99	2,44	2,31	2,33	0,99	2,29	2,12	1,87

erregend	beruhigend	–1,13	–0,79	–1,21	1,96	1,21	1,24	–0,41	–0,35	–0,49	0,90	0,02	1,40	0,35
erfahren	unerfahren	2,09	1,65	1,77	2,16	1,40	2,43	2,30	2,49	2,44	1,80	2,57	2,62	2,06
männlich	weiblich	–2,65	–1,73	–1,67	0,63	0,64	1,77	0,42	–1,40	–0,30	0,07	2,21	2,71	2,14
deutsch	ausländisch	2,19	1,98	1,90	2,36	2,17	1,70	0,34	2,45	1,88	1,77	2,39	2,26	1,96
politisch	unpolitisch	–2,50	–1,64	–1,64	–1,79	–2,36	2,83	–0,55	–2,57	–2,56	–2,35	–2,37	–2,35	–1,57
veränderlich	beständig	–1,13	–1,37	–1,04	–0,51	–0,89	–0,63	–1,10	–1,17	–0,99	–0,52	–1,45	–1,73	–1,95
hart	sanft	–1,98	–1,19	–1,59	0,32	0,59	2,08	–0,59	–1,31	–1,58	–0,51	1,14	0,51	0,37
vertraut	fremd	1,71	2,17	1,70	1,88	1,63	2,06	1,68	2,12	1,99	1,95	1,45	2,16	2,48
verworren	klar	–1,91	–1,81	–1,67	–1,78	–0,95	–2,02	–2,05	–2,12	–2,35	–1,52	–1,76	–2,32	–1,91
sachlich	unsachlich	2,18	1,95	1,49	1,56	1,09	2,15	2,33	2,28	2,39	1,44	2,52	2,39	2,31
zuverlässig	unzuverlässig	2,00	1,89	1,90	1,64	1,18	2,16	2,15	2,14	2,27	1,72	2,48	2,47	2,43
ernsthaft	verspielt	1,04	1,03	0,52	–0,08	–0,42	2,40	1,83	1,89	1,83	–0,22	2,35	1,57	1,76
modern	traditionell	2,06	0,43	0,87	2,06	2,00	1,22	0,34	2,16	2,52	2,39	1,68	0,82	1,61
gespannt	entspannt	–1,60	–0,51	–0,79	–0,06	–0,12	1,72	–0,04	–0,13	–0,87	0,30	–0,05	0,47	0,36

Übers. 12: Ein Imageprofil für 26 deutsche Publikumszeitschriften - Die Beurteilung erfolgte anhand von 20 bipolaren Eigenschaften

Quelle: o.VERFASSER: Zeitschriften-Profile - Die Positionierung von Zeitschriften im Imageraum, a.a.O., S. 14f.

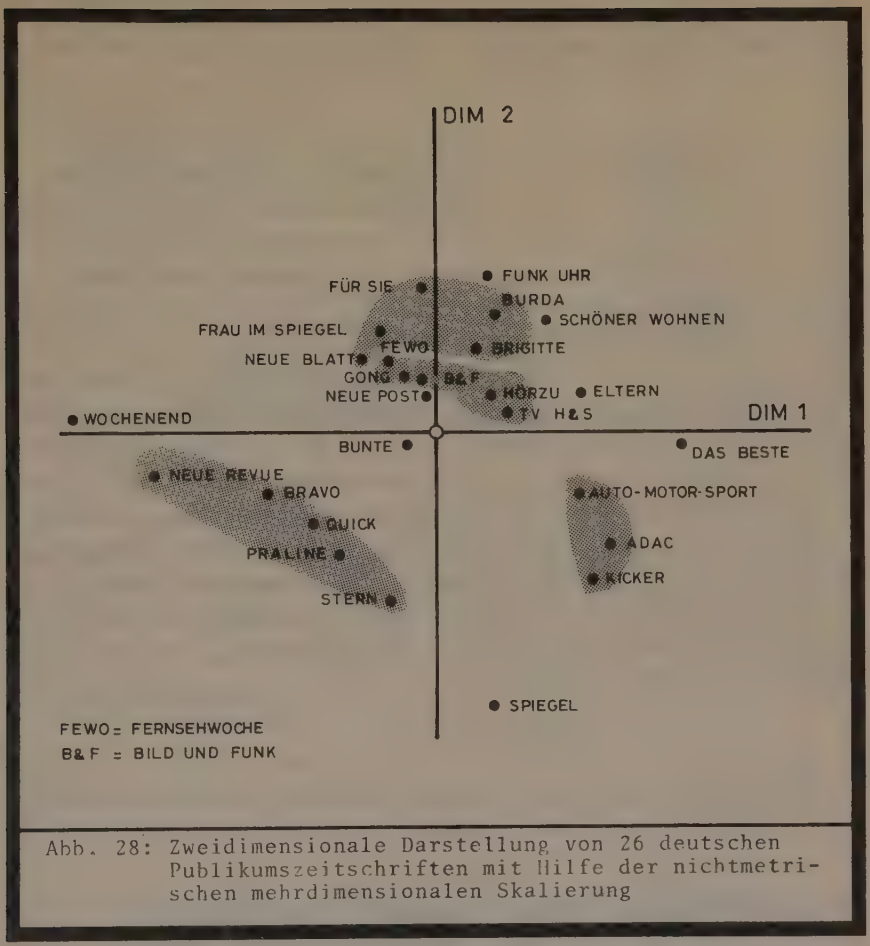


Abb. 28: Zweidimensionale Darstellung von 26 deutschen Publikumszeitschriften mit Hilfe der nichtmetrischen mehrdimensionalen Skalierung

Zu Kontrollzwecken wurden dieselben Daten mit Hilfe der metrischen mehrdimensionalen Skalierung ebenfalls verarbeitet. Dabei wurden die hier dargestellten Ergebnisse im wesentlichen bestätigt. Allerdings wurden die Punktwolken der einzelnen Zeitschriftengruppen stärker getrennt. Da die metrischen Verfahren aber unterstellen, daß die Unähnlichkeitswerte

intervallskaliert sind und diese Annahme auf die Daten des Beispiels kaum zutreffen dürfte, ist die nichtmetrische Skalierung vorgezogen worden[1].

Da die Verfahren der MDS lediglich die Position der Zeitschriften im Raum ermitteln, ist das Ergebnis nicht ohne weiteres zu interpretieren. Erfreulicherweise gibt es aber verschiedene Hilfsmittel zur Beschreibung der Dimensionen[2]. Hier soll im Rahmen einer externen Analyse mit Hilfe eines Vektormodells versucht werden, die wichtigsten der 20 Eigenschaften, nach denen die Zeitschriften im Imageprofil beurteilt worden sind, als Vektoren in der Konfiguration darzustellen. Zur Berechnung der Richtung der Vektoren diente das PROFIT-Computerprogramm[3]. Nachdem die Vektoren mittels linearer Regression festgelegt worden sind, läßt sich für jede Eigenschaft ein Korrelationskoeffizient berechnen. Dieser mißt den Zusammenhang zwischen dem Skalenwert der Zeitschrift auf der Eigenschaftsskala im Imageprofil und dem Skalenwert auf dem Eigenschaftsvektor in der Konfiguration. Die wichtigsten Eigenschaften, die einen Korrelationskoeffizienten $\geq$ 0,8 besaßen, sind in der Übersicht 13 aufgeführt.

---

1 In der Literatur finden sich weitere Imageanalysen mit Hilfe nichtmetrischer mehrdimensionaler Skalierungen. So z.B. bei KLAHR, D.: A study of consumer's cognitive structure for cigarette brands; a.a.O. S.190-204; SCHOBERT, R.: Die mehrdimensionale Skalierung als Instrument der Absatzforschung, a.a.O., S. 54 ff.

2 Vgl. Abschnitt 8.3 dieser Arbeit.

3 GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, a.a.O. S.210 ff.

Eigenschaft	Korrelationskoeffizient
sachlich-unsachlich	0,94
hart-sanft	0,94
zuverlässig-unzuverlässig	0,91
solide-unsolide	0,90
erregend-beruhigend	0,89
gespannt-entspannend	0,85
verworren-klar	0,84
ernsthaft-verspielt	0,84
erfahren-unerfahren	0,83
sonstige	$\leq$ 0,80

Übers. 13: Die Korrelationskoeffizienten für ausgewählte Eigenschaften

Die Eigenschaften können als Ursprungsfahrstrahl, d.h. Vektor, im MDS-Output dargestellt werden. In Abb. 29 sind nur solche Eigenschaftsvektoren eingetragen, die sich durch einen Korrelationskoeffizienten $\geq$ 0,85 auszeichnen. Diejenigen Eigenschaftsvektoren, die in ihrer Richtung ungefähr mit den Achsen des Koordinatensystems übereinstimmen, geben Hinweise zur Interpretation dieser Achsen.

Nach Abb. 29 wären Dimension 1 mit Sachlichkeit (Unsachlichkeit) bzw. Zuverlässigkeit (Unzuverlässigkeit) und Dimension 2 mit Ruhe (Erregung) bzw. Sanftheit (Härte) inhaltlich zu umschreiben.
Interpretiert man dieses Ergebnis, so bestätigt die räumliche Anordnung der Zeitschriften im Imageraum, daß es neben 'Außenseitern', wie z.B. WOCHENEND, DAS BESTE und DER SPIEGEL, im wesentlichen vier Zeitschriftengruppen, nämlich die Frauen-, Männer-, Programmzeitschriften und die aktuellen Illustrierten gibt.
Überraschenderweise wurde die PRALINE im Segment der aktuellen Illustrierten positioniert. Diese Imagestellung ist zweifellos verzerrt, denn die PRALINE hat sich sowohl im redaktionellen

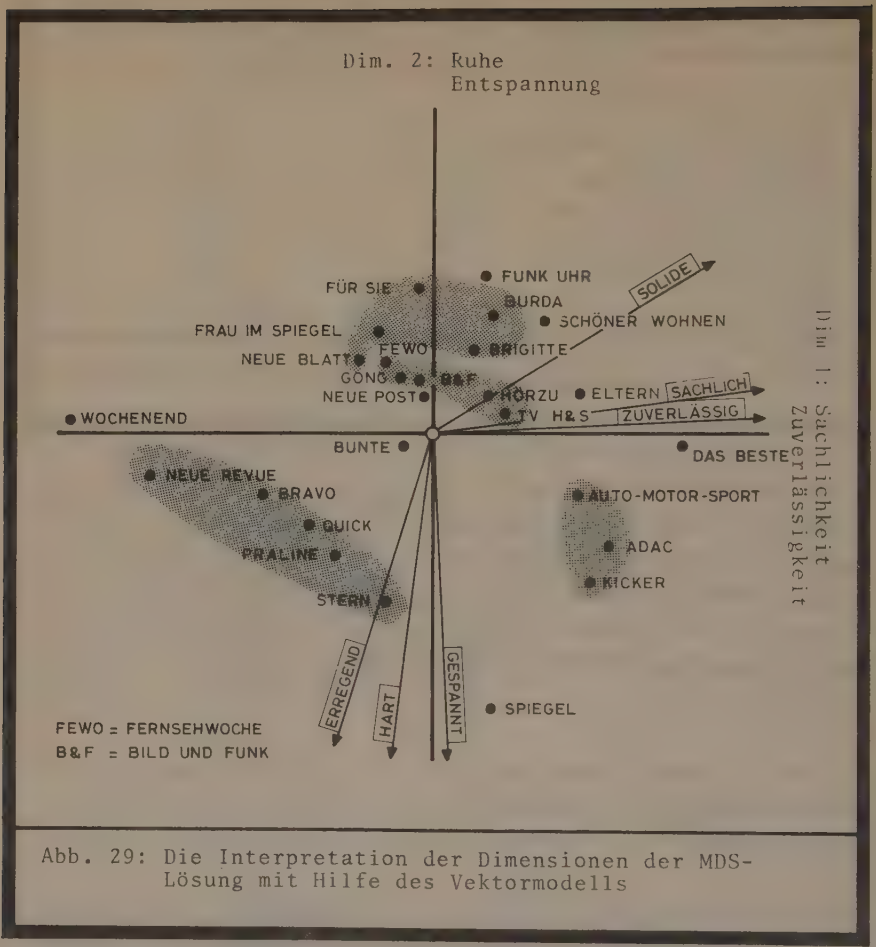


Abb. 29: Die Interpretation der Dimensionen der MDS-Lösung mit Hilfe des Vektormodells

Teil als auch in der Aufmachung in den letzten Jahren von einer Zeitschrift gehobenen Niveaus abgewandt und ist von ihrem heutigen Inhalt her nicht mehr der Gruppe der aktuellen Illustrierten zuzuordnen. Die verzerrte Imagestellung resultiert daraus, daß nicht sämtliche Käufer diese Wandlung registriert haben. Ein deutscher Zeitschriftenverlag bestätigte, daß bei seinen

Imageuntersuchungen die PRALINE ebenfalls zu unerwarteten Ergebnissen geführt habe. - Die relativ große Entfernung der BUNTE vom Segment der aktuellen Wochenzeitschriften erklärt sich dadurch, daß neben einem vergleichsweise geringeren politischen Teil häufig Reportagen über Prominente abgedruckt werden und die BUNTE nach Meinung ihrer Leser im Gegensatz zu STERN, QUICK und NEUE REVUE kaum über 'unappetitliche Geschichten'[1] berichtet. Die Lage der BUNTE im Imageraum unterstreicht ihre Sonderstellung unter den aktuellen Illustrierten. Die FUNK UHR liegt vermutlich deshalb nicht näher am Segment der Programmzeitschriften, da sie sich preislich und hinsichtlich ihres Aufbaus von den übrigen Funk- und Fernsehzeitschriften unterscheidet. Auch hier ist es mit Hilfe der mehrdimensionalen Skalierung gelungen, diese Sonderstellung optisch zu unterstreichen.

Welche Informationen kann nun eine solche MDS-Lösung für den Anzeigenauftraggeber bzw. für den Verleger von Zeitschriften bereitstellen?
Häufig kann ein Anzeigenauftraggeber mit Hilfe verschiedener Zeitschriften eine ähnliche Zielgruppenansprache erreichen, und er steht vor dem Problem, welche(n) Titel er auswählen soll. Geht man davon aus, daß der Aufmerksamkeitsgrad der Leser bei solchen Zeitschriften am größten ist, die einerseits Ruhe und Entspannung bieten und andererseits eine gewisse Seriosität wahren, dann wäre es für den Inserenten am vorteilhaftesten, in solchen Blättern zu inserieren, die in Abb. 29 im 1. Quadranten des Imageraumes positioniert sind. - Für den Verleger ist es interessant zu wissen, daß solche Zeitschriften, die imagemäßig Ausnahmen darstellen, da sie außerhalb von Punktwolken liegen, wie z.B. FUNK UHR, BUNTE, DAS BESTE und DER SPIEGEL, relativ hohe Auflagezahlen besitzen. Das legt die Vermutung nahe, daß eine Außenseiterposition im Imageraum häufig mit einem großen Käuferkreis verbunden ist und das Erkennen einer imagemäßigen Marktlücke durchaus gute Absatzchancen bietet.

Die Daten des Imageprofils sind bei der Untersuchung im Auftrage der HÖR ZU und der FUNK UHR mit Hilfe der Faktorenanalyse

---

1 o. VERFASSER: Zeitschriften Profile - Die Positionierung von Zeitschriften im Imageraum, a.a.O., S.22.

verarbeitet worden. Dabei konnten zwei Faktoren extrahiert werden, und es ergab sich eine Positionierung der 26 Zeitschriften, wie sie in Abb. 30 dargestellt ist.

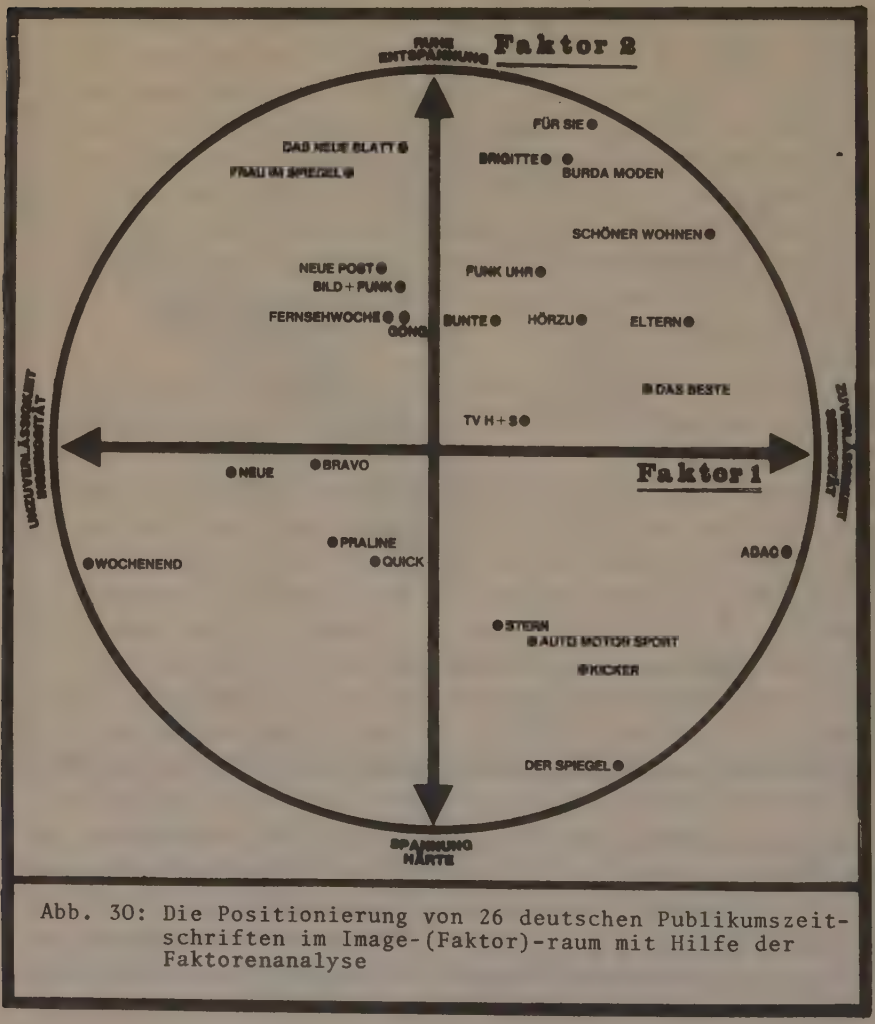


Abb. 30: Die Positionierung von 26 deutschen Publikumszeitschriften im Image-(Faktor)-raum mit Hilfe der Faktorenanalyse

Quelle: o. VERFASSER: Zeitschriftenprofile - Die Positionierung von Zeitschriften im Imageraum, a.a.O., S. 11.

Vergleicht man die in Abb. 29 dargestellten Punktepositionen mit der Lage der Zeitschriften im Faktorraum, wie sie Abb. 30 dargestellt ist, so sind die Ergebnisse zwar nicht identisch, aber doch ähnlich. Obwohl es sich bei der NMDS im Gegensatz zur Faktorenanalyse um ein iteratives Verfahren handelt, welches auf völlig anderen mathematischen Grundlagen aufbaut, sind die Ergebnisse doch in etwa vergleichbar. Allerdings weist die mit der mehrdimensionalen Skalierung erhaltene Konfiguration Imagepositionen für die Zeitschriften auf, die teilweise plausibler erscheinen, was an zwei Beispielen erläutert werden soll.
So werden z.B. in der MDS-Lösung AUTO MOTOR UND SPORT und ADAC MOTORWELT näher zueinander positioniert als AUTO MOTOR UND SPORT und STERN, was durchaus einsichtig ist. Dagegen ist im Faktorraum eine derartige Anordnung dieser drei Zeitschriften nicht zu finden, sondern es werden STERN und AUTO MOTOR UND SPORT sehr nah zueinander positioniert.
Ein weiteres Beispiel ist die Lage der BUNTE im Imageraum. Während die BUNTE bei der MDS-Konfiguration relativ nah an der Zeitschriftengruppe der aktuellen Illustrierten liegt, ist sie bei der Lösung mit Hilfe der Faktorenanalyse unverständlicherweise im Segment der Programmzeitschriften positioniert.

Vergleicht man die inhaltliche Beschreibung der Dimensionen (in Abb.29) mit derjenigen der Faktoren (in Abb.30), so stimmen beide Interpretationen in etwa überein. Allerdings ist die oben beschriebene Dimensionenbeschreibung der MDS-Lösungen mit Hilfe des Vektormodells methodisch abgesichert, während die Interpretation der Faktoren meist subjektiv erfolgt.

Faßt man die Ergebnisse dieses Beispiels zur Imageanalyse mit Hilfe mehrdimensionaler Skalierungen zusammen, so kann festgestellt werden, daß es durch die MDS-Verfahren gelungen ist, die relativ unübersichtlichen Imageprofile der Übers. 11 anschaulich als Konfiguration darzustellen, ohne daß wesentliche

Informationen verlorengegangen sind. Insofern hat sich die MDS als Methode der Datenreduktion bewährt. Die Vermutung, daß es neben Einzelerscheinungen bei den deutschen Zeitschriften im wesentlichen vier Zeitschriftengruppen, nämlich die Programm-, Frauen-, Männerzeitschriften und die aktuellen Illustrierten gibt, hat sich bestätigt. Die MDS hat sich also auch als Methode zur Überprüfung bestimmter Strukturhypothesen bewährt.

In der Studie des westdeutschen Zeitschriftenmarktes konnten die Idealvorstellungen der Käufer nicht berücksichtigt werden, da dazu notwendige Daten nicht verfügbar waren. So hätte man die Idealvorstellungen relativ einfach miterheben können, indem jede Vp gebeten worden wäre,sich eine ideale Zeitschrift vorzustellen und diese dann anhand der 20 Eigenschaften ebenfalls zu beurteilen. Dadurch wäre es möglich gewesen, für jede Vp bzw. Vpn-Gruppe einen Idealpunkt abzuleiten. Wenn sich dann bestimmte Idealpunktcluster ergeben, dann hätte man überprüfen können, ob die Käuferwünsche durch die bestehenden Zeitschriften voll abgedeckt werden. Wäre das nicht der Fall gewesen, dann ergäben sich u.U. Marktlücken, die durch eine neu einzuführende Zeitschrift bzw. durch die bewußte Imageänderung einer bestehenden Zeitschrift hätte abgedeckt werden können. Untersuchungen haben nämlich bestätigt, daß die Kaufwahrscheinlichkeit für ein Produkt dann am größten ist, wenn Idealvorstellung und Produktimage übereinstimmen[1].

Weiterhin wäre es sinnvoll gewesen, die Images der Zeitschriften nach bestimmten Zeitabschnitten nochmals beurteilen zu lassen und nochmals abzubilden.In einer derartigen komparativ-statischen Analyse hätte man Imageveränderungen der Zeitschriften mit Hilfe der MDS-Verfahren sichtbar machen können. Es fließen daher in Imageuntersuchungen mittels mehrdimensionaler

---

1 Vgl. BIRDWELL, A.E.: A study of the influence of image congruence on consumer choice, in: Journal of Business, Vol. 41 (1968), S. 76-88.

Skalierungen erstmals dynamische Aspekte ein[1]. Somit ist es z.B. möglich, die Imagewirkungen bestimmter Marketingaktivitäten zu kontrollieren. Durch eine derartige zeitbezogene Darstellung der Imageveränderungen ist die MDS beispielsweise auch als Werbewirkungsanalysetechnik denkbar.

9.3 Produktpositionierung

" The name of marketing in the seventies is 'Positioning'. And only the better players will survive."[2]. Mit Hilfe der Produktpositionierung soll festgestellt werden, wie die Konsumenten die Produkte eines bestimmten in sich geschlossenen Marktes wahrnehmen. Außerdem geht es darum, das eigene Produkt zu profilieren und optimal am Markt zu positionieren. Dabei werden in der Regel mehrere Ziele verfolgt, von denen einige im folgenden aufgeführt werden sollen:[3]

- -Erkennen der Marken- und Produktstruktur,
- -Untersuchung welche Möglichkeiten es gibt bestimmte Produkte durch andere zu ersetzen,
- -Analyse der einzelnen Marken- bzw. Produktkonzepte,
- -Auffinden von Marktnischen und
- -Kontrolle des Erreichens eines bestimmten Produktsegmentes nach Lancierung eines neuen Produktes.

---

1 MOINPOUR, R. und MACLACHLAN, D.L.: Longitudinal measurement with multidimensional scaling, in: Combined Proceedings, Series No. 35 (1973), S. 333-338.

2 BÄCHTHOLD, R.: Produktpositionierung und KAufverhalten, unveröffentlichtes Manuskript der PROOF-Gruppe für operationelle Marketing Forschung, Dübendorf Mai 1974, S. 1.

3 BÄCHTHOLD, R.: Produktpositionierung und Kaufverhalten, a.a.O., S.5; BÄCHTHOLD, R.: Produkt-Positionierung, in: Klöti-Wild Perspektiven, Kundenzeitschrift der Klöti Wild AG, Werbeagentur Zürich, Ausgabe 1 (Aug. 1973), S. 12-18, hier S. 14.

Wie eine Produktpositionierung mit Hilfe von MDS-Verfahren durchgeführt werden könnte, soll hier in Anlehnung an STEFFLRE[1] dargestellt werden. Dabei wird von folgenden Überlegungen ausgegangen: Den Vpn werden Beschreibungen von noch nicht entwickelten Produkten vorgelegt, und die Vpn sollen diese Produkte mit bereits bestehenden hinsichtlich der Ähnlichkeit vergleichen. Die Beschreibungen müssen so umfassend sein, daß anschließend das reale Produkt genauso wahrgenommen wird wie das vorher beschriebene. Gelingt diese Darstellung des Produktes, so können die Erfolgschancen eines neuen Produkts vor seiner Entwicklung prognostiziert werden. Die hohe 'Versagerquote' bei Neueinführungen kann verringert werden. Dazu werden verschiedene Produktbeschreibungen ausgewählt und die Lage dieser fiktiven mit den bereits bestehenden Produkten im Wahrnehmungsraum verglichen. Anschließend wird die beste Lage für das neu einzuführende Produkt festgelegt. Diejenige Produktbeschreibung, die dieser Region am nächsten liegt, gilt als optimal.
Diese Gedanken sollen anhand eines hypothetischen Beispiels verdeutlicht werden. Der Hersteller des Produktes A will ein neues Produkt X so einführen, daß sein Marktanteil in der aus den Produkten A, B, C, D und E bestehenden Produktklasse maximiert wird. Es müssen daher möglichst Konsumenten der Marken B, C, D oder E abgeworben werden. Dazu hat der Hersteller für das neue Produkt drei verschiedene Konzeptionen X_1, X_2 und X_3 entwickelt, und er will überprüfen, welche Konzeption den größten Erfolg verspricht. Vor Beginn der Neueinführung seien die Marktanteile der einzelnen Produkte bekannt:

---

1 STEFFLRE, V.J.: Market structure studies. New products for old markets and new markets for old products, in: BASS, F., KING, C.W. und PRESSEMIER, E.A. (Hrsg.): Applications of the science in marketing management, New York 1968, S. 251-268; BARNETT, N.L.: Developing effective advertising for new products, in: Journal of Advertising Research. Wieder abgedruckt in: AAKER, D.A. (Hrsg.): Multivariate Analysis in Marketing; a.a.O., S. 282-289; HOMAYOUNFAR, F.: Evaluation of market potential for new industrial products: An application of multidimensional scaling techniques, Diss., University of Stanford 1970.

Produkt	Marktanteil in %
A	35
B	10
C	30
D	15
E	10

Zunächst werden einer Gruppe von 25-100 Verbrauchern ('small scale study') die Produkte A - E und die Produktbeschreibungen X_1, X_2 und X_3 vorgelegt. Die Vpn sollen die Ähnlichkeit zwischen den einzelnen Produktpaaren beurteilen. Mit Hilfe der MDS ergibt sich folgender Wahrnehmungsraum (Abb. 31):

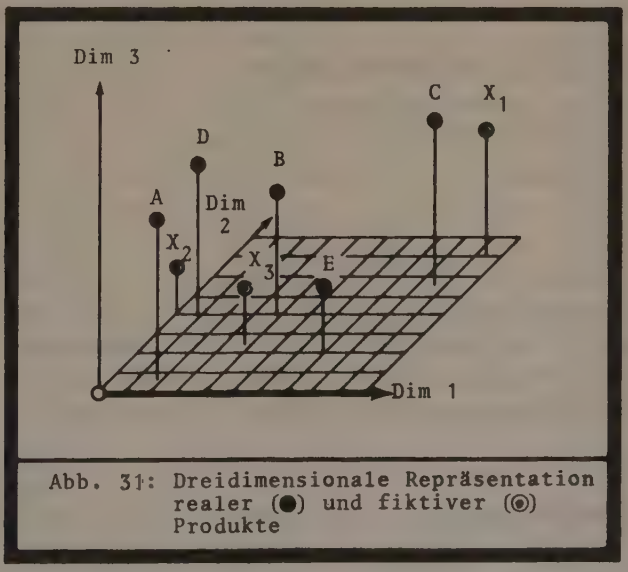


Abb. 31: Dreidimensionale Repräsentation realer (●) und fiktiver (◉) Produkte

Bei der weiteren Analyse wird nun unterstellt, daß ähnliche Produkte nah im Raum zusammenliegen und eine höhere Konkurrenzintensität besitzen als unähnliche. Untersuchungen

in den USA[1] und in Frankreich zeigten, daß eine hohe Korrelation zwischen effektiver Substitution und Ähnlichkeit besteht.[2] Anschließend muß eine Entscheidung über die günstigste Region für das neu einzuführende Produkt gefällt werden. Bei einer Datenkonstellation wie in Abb. 31 ist die Lösung relativ einfach. Da C den größten Marktanteil besitzt und am weitesten entfernt von der hauseigenen Marke A liegt, empfiehlt es sich, solch ein Produkt neu einzuführen, welches ähnlich wie C wahrgenommen wird. Produktbeschreibung X_1 ist also optimal. Die nach Einführung des neuen Produktes sich ergebenden Verkaufsergebnisse werden durch eine spezielle Befragungstechnik ermittelt[3]. Wenn nach der Einführung das reale Produkt genauso wahrgenommen wird wie die erfolgversprechende Beschreibung X_1, so kann u.U. folgendes Resultat erzielt werden:

Produkt	Marktanteil in %
A	35
B	10
C	15
D	15
E	10
X_1	15

Durch die Einführung des neuen Produktes wäre es gelungen, den Marktanteil der eigenen Firma (Produkt A und X_1) auf 50 % zu Lasten des Konkurrenzproduktes C zu steigern.

Anzumerken bleibt, daß es fraglich ist, ob eine derartige Produktbeschreibung gefunden werden kann. Trotzdem ist dieses

---

1 STEFFLRE, V.J.: Some applications of multidimensional scaling to social science problems, in: SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B. (Hrsg.): Multidimensional scaling, Vol. II/Applications, New York und London 1972, S. 227 f.

2 BÄCHTHOLD, R.: Produkt-Positionierung, a.a.O., S.15.

3 STEFFLRE, V.J.: Some applications of multidimensional scaling to social science problems, a.a.O.,S. 236 f.

auf STEFFLRE beruhende Konzept ein fruchtbarer Denkanstoß und zeigt auf, wie MDS-Verfahren bei Produktpositionsproblemen eingesetzt werden können.

9.4 Ein Vorschlag zur Marktsegmentierung

Unter M a r k t s e g m e n t i e r u n g versteht man die Zerlegung eines Gesamtmarktes in möglichst homogene Teilmärkte. Man unterscheidet die Aufteilung in kaufverhaltenshomogene Konsumentengruppen und die Aufteilung in Produktgruppen, die gleichartig wahrgenommen werden. Die Segmentierung kann nach sozioökonomischen, geographischen, demographischen oder nach psychographischen Größen erfolgen. Für die letztgenannte Variablengruppe bieten sich insbesondere die MDS-Verfahren an[1]. Aus ökonomischen Gründen empfiehlt es sich, nicht jeden Konsumenten einzeln durch bestimmte Marketingaktivitäten anzusprechen, sondern möglichst Konsumentengruppen, bei denen die Werbemaßnahmen besonders wirksam sind.
Deshalb soll nun erläutert werden, wie mehrdimensionale Skalierungen für die konsumentenorientierte Aufteilung des Marktes eingesetzt werden können. Dabei wird gezeigt, daß folgende Informationen beschafft werden können: Es kann mit Hilfe der MDS-Verfahren erkannt werden, welche Kundengruppen auf Grund ihres Umfangs einen hohen mengenmäßigen Absatz für die Produkte ermöglichen. Außerdem kann untersucht werden, welche Bedürfnisse bestimmter Kundengruppen durch das bisher bestehende Produktangebot nicht voll befriedigt werden und welche

---

1 DOEHLERT, D.H.: Similarity and preference mapping: A color example, in: AAKER, D.A. (Hrsg.): Multivariate analysis in marketing; theory and application, Belmont 1971, S. 290-298; FRANK, R.E., MASSY, W.F. und WIND, Y.: Market segmentation, Prentice Hall 1972, S. 165 ff.; JOHNSON, R.M.: Market segmentation - a strategic management tool, in: JoMR, Vol. IX (Febr. 1971), S. 13-18; LEHMANN, D.E.: Judged similarity and brand switching data as similarity measures, in: JoMR, Vol. IX (1972), S. 331-334; RITCHIE, J.R.B.: The identification of market segments through the application of an individual differences multidimensional scaling model, Diss., University of Western Ontario (1972); SCHREIBER, U.: Psychologische Marktsegmentierung mit Hilfe multivariater Verfahren, Diss., München 1973, S. 50 ff.

Produktimages den Idealvorstellungen einer bestimmten Konsumentengruppe am besten entsprechen.

Inwiefern diese Informationen mit Hilfe der MDS-Verfahren bereitgestellt werden können, soll an einem hypothetischen Beispiel des Fruchtsaftmarktes erläutert werden. Es wird angenommen, daß 40 Vpn eine repräsentative Stichprobe zur Beurteilung der vier Fruchtsäfte A, B, C und D bilden. Weiterhin wird davon ausgegangen, daß sowohl die Vpn durch ihre Idealprodukte, als auch die Getränke in einem gemeinsamen Attributraum (joint space) darstellbar sind[1]. Es interessieren die für die Beurteilung der Fruchtsäfte relevanten Dimensionen, das Gewicht, welches die Konsumenten diesen Dimensionen beimessen und wie sich Konsumentensegmente mit Hilfe von Idealvorstellungen der Verbraucher identifizieren lassen. Das bedeutet, daß hier eine Segmentierung anhand der Käufermotive, d.h. mit Hilfe psychographischer Variabler durchgeführt wird. "Since a product can satisfy a variety of needs and motives it is sometimes usefull to divide the market for the product according to which motive may predominate"[2].

Grundsätzlich ist die heterogene Gesamtheit der Käufer durch drei Unterscheidungsmerkmale gekennzeichnet:

1. Die Beurteilungsdimensionen für die Produkte sind bei den Käufern hinsichtlich Art und Gewichtung unterschiedlich.
2. Die Verbraucher beurteilen gleiche Produkte unterschiedlich.
3. Es gibt Konsumenten, die bei gleicher Produktwahrnehmung unterschiedliche Idealprodukte besitzen.

Versucht man die Gesamtheit der Käufer in homogene Gruppen (Segmente) zu gliedern, so müssen in diesem Fall drei sukzes-

---

1 GREEN, P.E. und TULL, P.S.: Research for marketing decisions, Prentice Hall 1970, S. 213 ff.

2 KOTLER, P.: Marketing management, a.a.O., S. 50.

siv strenger werdende Homogenitätskriterien berücksichtigt werden: Die Gesamtheit der Konsumenten (G) teilt sich auf in Gruppen (G_1, G_2,...) mit gleichen Beurteilungsdimensionen. Diese lassen sich weiter aufteilen in Untergruppen (G_{11}, G_{12}, ..., G_{21}, G_{22},...) mit relativ kongruenter Produktwahrnehmung. Diejenigen Konsumenten dieser Untergruppen, die durch gleiche Idealproduktvorstellungen gekennzeichnet sind, werden als Kundensegmente (G_{111}, G_{112},..., G_{121}, G_{122},..., G_{211}, G_{212},...) bezeichnet. Diese Definition deutet an, daß nicht alle Konsumenten einem bestimmten Segment zugeordnet werden können. Es wird auf jeder Unterteilungsstufe eine heterogene Restgruppe bleiben. Darin werden Konsumenten zusammengefaßt, die hinsichtlich ihrer Vorstellungen Einzelerscheinungen darstellen.

Die Identifikation der Kundensegmente des Fruchtsaftmarktes erfolgt somit durch eine dreistufige Vorgehensweise: Im ersten Schritt wird mit Hilfe nichtaggregierender MDS-Verfahren[1] ein Konsumentenraum (vgl. Abb. 32) konstruiert, der dreidimensional ist und dessen Achsen als 'Preiswürdigkeit', 'vermeintlicher Fruchtanteil' und 'Geschmack' interpretiert werden. Jede Vp wird in Abb. 32 durch ein 'o' abgebildet. Die Lage der Vp im Konsumentenraum ist von der individuellen Gewichtung der drei Beurteilungsdimensionen abhängig. Die Vpn, die im Raum nahe beieinanderliegen, haben somit die gleichen Beurteilungsdimensionen. So haben sich zunächst zwei Gruppen (G_1 und G_2) gebildet, die zweidimensional urteilen. Gruppe G_1 urteilt im wesentlichen nach den Dimensionen Preiswürdigkeit und Fruchtanteil, während Gruppe G_2 die Getränke hinsichtlich Preiswürdigkeit und Geschmack unterscheidet. Punkte (Konsumenten), die außerhalb dieser zwei Cluster liegen, werden nicht zusammengefaßt, da sie sehr heterogene Urteilsräume besitzen.

---

1 Vgl. Kapitel 7 dieser Arbeit.

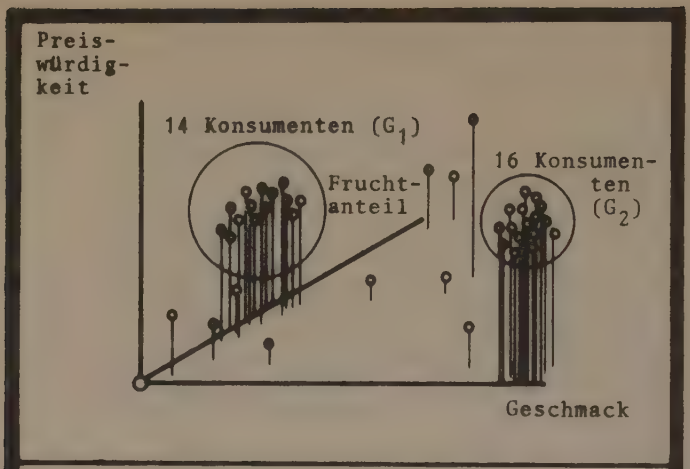


Abb.32 : Dimensionsgewichte für 40 Vpn

Im zweiten Schritt wird für jede Vp getrennt die Lage der Fruchtsäfte A, B, C und D im Wahrnehmungsraum berechnet. Ergeben sich für alle Mitglieder einer Gruppe annähernd die gleichen Produktabbildungen, so ist diese Gruppe durch Wahrnehmungshomogenität gekennzeichnet. In der Regel werden sich aber unterschiedliche Positionen für die Produkte ergeben. Deshalb werden innerhalb der Gewichtscluster G_1 bzw. G_2 die Vpn mit gleichen Vorstellungen über die Fruchtsäfte zu Untergruppen G_{11}, G_{12}, ... usw. bzw. G_{21}, G_{22}, ... usw. zusammengefaßt. Angenommen, G_1 sei durch Wahrnehmungshomogenität gekennzeichnet, so existiert nur eine Untergruppe G_{11}.

Im dritten Schritt müssen zur Ableitung der Idealproduktpositionen zunächst Präferenzdaten[1] von allen Mitgliedern von G_{11} erhoben werden. Die Idealprodukte werden dann in dem

1 Vgl. Abschnitt 3.5 und 7.3 dieser Arbeit.

Wahrnehmungsraum der Fruchtsäfte als Idealpunkt (o) abgebildet (vgl. Abb. 33). Ergeben sich Idealpunktanhäufungen, so haben relativ viele Käufer die gleichen Vorstellungen über einen idealen Fruchtsaft, der ihren Wünschen genau entsprechen würde. Die Konsumenten einer derartigen Gruppe bilden dann ein Kundensegment. In Abb. 33 ergeben sich für die Untergruppe G_{11} zwei Kundensegmente G_{111} und G_{112}. Die entsprechenden Vpn erfüllen die drei geforderten Homogenitätsbedingungen.

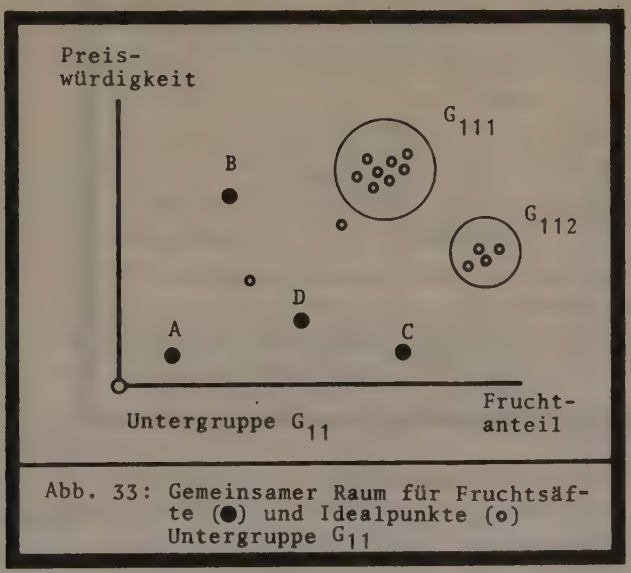


Abb. 33: Gemeinsamer Raum für Fruchtsäfte (●) und Idealpunkte (o) Untergruppe G_{11}

Auf Grund ihrer Idealpunktvorstellungen müssen zwei Versuchspersonen als 'Außenseiter' gelten (vgl. Abb. 33). Sie können keinem Segment zugeordnet werden. Durch diese Vorgehensweise ist es gelungen, für Gruppe G_1 zwei Kundensegmente zu identifizieren: Die 8 Vpn des Segmentes G_{111} legen besonderen Wert auf preisgünstige Fruchtsäfte, während die 4 Vpn des Segments G_{112} bereit sind, mehr zu bezahlen, wenn der Fruchtanteil der Getränke hoch ist.

Für die 16 Vpn des Gewichtsclusters G_2 in Abb. 32 empfiehlt sich zur Bestimmung der Kundensegmente ein analoges Vorgehen. Angenommen, die Vpn könnten in zwei wahrnehmungshomogene Untergruppen G_{21} und G_{22} zerlegt werden, so ergibt sich, nachdem ihre Idealvorstellungen berücksichtigt worden sind, Abb. 34.

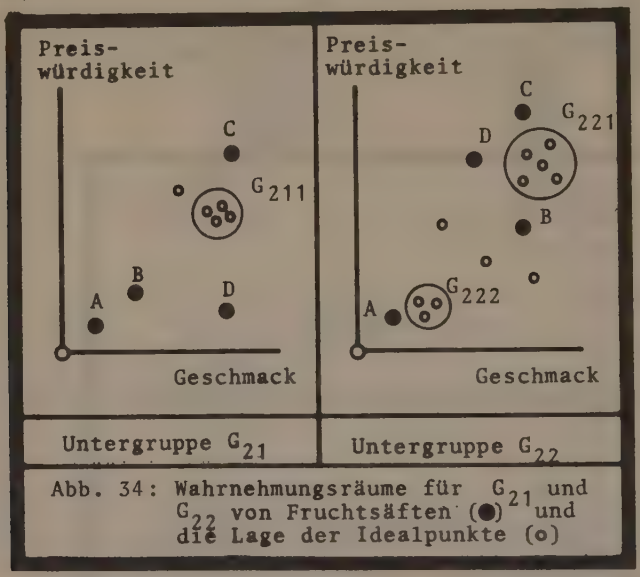


Abb. 34: Wahrnehmungsräume für G_{21} und G_{22} von Fruchtsäften (●) und die Lage der Idealpunkte (o)

Hier können drei Kundensegmente G_{211} (4 Vpn), G_{221} (5 Vpn) und G_{222} (3 Vpn) gebildet werden, die sich durch unterschiedliche Vorstellungen über Preis und Geschmack unterscheiden.

Insgesamt konnten fünf Segmente identifiziert werden. Von den 40 Vpn sind aber 16 Vpn keinem bestimmten Segment zugeordnet worden. Es werden immer einige Vpn übrig bleiben, die eine heterogene Restgruppe darstellen. Dabei handelt es sich um solche Konsumenten, deren Wünsche sich nicht so klar umschreiben lassen,wie bei den Mitgliedern der Segmente. Bei praktischen Untersuchungen wird man daher prüfen müssen, ob nicht weniger als drei Homogenitätsbedingungen gefordert werden sollten, denn mit zunehmendem Homogenitätsgrad wird die Anzahl der Vpn, die einem bestimmten Segment zugeordnet werden

kann, immer geringer. Der Marktsegmentierungsgedanke würde bei extremen Anforderungen an die Gleichartigkeit der Segmente ad absurdum geführt, da 'perfekte' Homogenität theoretisch nur dann gewährleistet ist, wenn jedes Segment nur noch aus einer Vp besteht.

Dieser Vorschlag zur Identifikation von Kundensegmenten sollte zeigen, wie die MDS-Techniken bei Marktsegmentierungsproblemen in etwa eingesetzt werden könnten. Die praktische Berechnung des Subjektraumes kann durch das INDSCAL - Programm erfolgen[1]. Zur Identifikation der Gruppen G_1, G_2,... usw. empfiehlt sich daran anschließend eine Clusteranalyse[2]. Zur Bestimmung der Untergruppen G_{11}, G_{12},... usw. müssen die Wahrnehmungsräume z.B. mit TORSCA 8 [3] für die Gruppenmitglieder ermittelt werden. Daran anschließend werden mit Hilfe von Präferenzdaten die Idealpunkte festgelegt. Das kann durch das Programm PREFMAP[4] erfolgen, das dann eine Identifikation der Segmente erlaubt.

Der hier vorgeschlagene Lösungsweg und die Operationalisierung dieser Gedankengänge mit Hilfe der MDS-Verfahren geben wertvolle Hinweise auf verschiedene Gesichtspunkte, die eine differenzierte Marktbearbeitung ermöglichen. So werden z.B. zu folgenden segmentspezifischen Problemkreisen Informationen beschafft:

1. Verbraucherpotential: Segmente mit großer Konsumentenzahl versprechen einen hohen mengenmäßigen Absatz (G_{111} in Abb. 33).
2. Marktnischen: Es gibt u.U. Segmente, d.h. Käufergruppen (z.B.G_{112} in Abb.33), deren Bedürfnisse durch die bisher existierenden Produkte nicht voll abgedeckt werden.

---

1 GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, a.a.O., S. 148 f.

2 Ebenda, S. 97 ff.

3 GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, Winston 1972, S. 192 ff.

4 GREEN, P.E. und Carmone, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, a.a.O., S. 148.

3. Imagepflege: Durch spezielle Werbeaktivitäten wird die Verschiebung eines Produkts in die Nähe von Idealpunktwolken ermöglicht. (So empfiehlt es sich z.B. bei zukünftigen Werbemaßnahmen, den Fruchtanteil des Produkts B mehr in den Mittelpunkt der Werbeaussage zu stellen, vgl. Abb. 33).

Dieser Informationskatalog ließe sich sicher leicht erweitern, er zeigt aber, wie die Auswertung der durch die mehrdimensionale Skalierung bereitgestellten Resultate aussehen könnte.

10 SCHLUSSBEMERKUNGEN

Das wesentliche Anliegen dieser Arbeit war eine exemplarische Darstellung der Lösungsmöglichkeiten ausgewählter Problemstellungen des Marketing mit Hilfe mehrdimensionaler Skalierungen. Es wurde gezeigt, daß man bei der Beschreibung von Einstellungen, Wünschen und Motiven der Käufer nicht allein auf vage verbale Formulierungen angewiesen ist, sondern daß es mit Hilfe des dargestellten Instrumentariums möglich ist, psychographische Größen zu objektivieren. Wie der Kontakt zu einigen Anwendern dieser Verfahren und eine eingehende Literaturanalyse bestätigten, fehlte es an einer Darstellung, die sowohl einen Einblick in die Algorithmen vermittelte, als auch Anwendungsmöglichkeiten aufzeigte. Eine ausführliche Beschreibung der Algorithmen erwies sich deshalb als zweckmäßig, da ein sinnvoller Einsatz der in den USA kommerziell vertriebenen Computerprogramme nur dann möglich ist, wenn die numerischen Lösungswege bekannt sind. Dazu sind in der Arbeit vereinfachte Beispiele konstruiert worden, um die teilweise komplizierten mathematisch-statistischen Lösungswege exemplarisch vorzuführen.

Vergleicht man die metrischen mit den nichtmetrischen MDS-Verfahren, so besitzen beide Methoden ihre Berechtigung. Immer dann, wenn die Daten den Anforderung der metrischen Verfahren genügen, sollte man diese Methoden auch einsetzen. Dabei sind die nichtaggregierenden metrischen Verfahren von besonderer Bedeutung, da sie individuelle Beurteilungsunterschiede sichtbar machen, wie an dem Beispiel zur Marktsegmentierung gezeigt wurde. Auch bei kleiner Objektanzahl sind nur die metrischen Verfahren in der Lage, stabile Ergebnisse zu produzieren. Außerdem haben sie sich als Hilfs- und Kontrollinstrument für die iterativen nichtmetrischen Verfahren bewährt: So werden die Startkonfigurationen häufig mittels der metrischen Verfahren berechnet und metrische mit nichtmetrischen Lösungen

zur Identifikation suboptimaler oder degenerierter Konfigurationen verglichen. Bei großer Objektanzahl liefern beide MDS-Verfahren in der Regel (fast) kongruente Punktekonfigurationen. Da die Anforderungen an das Skalenniveau der Daten bei den nichtmetrischen Verfahren aber geringer sind und bei Marktdaten eher unterstellt werden können, besitzen diese Verfahren in der praktischen Anwendung die größere Bedeutung. Wie diese Methoden z.B. zur Imageanalyse eingesetzt werden können, ist anhand empirischer Daten des Zeitschriftenmarktes vorgeführt worden.

Der Anwender ist insbesondere daran interessiert, wieviele Objekte ausgewählt werden sollen und welche Methoden der Datenerhebung sich besonders empfehlen. Außerdem interessiert ihn, wie die Dimensionen interpretiert werden können. Für diese Probleme sind in der Arbeit einige Lösungsmöglichkeiten beschrieben worden: Was den Objektumfang betrifft, so kann als allgemeine Faustregel gelten, daß auf keinen Fall weniger als sechs und in der Regel höchstens 15 Objekte gleichzeitig skaliert werden sollten. Bei der Datenerhebung besitzt bei kleinem Objektumfang die Ankerreizmethode gegenüber anderen direkten Verfahren zur Ermittlung der Ähnlichkeitswerte eine gewisse Überlegenheit, da sie die Vpn-Belastung in Grenzen hält und trotzdem zufriedenstellende Resultate ermöglicht. Sollte es allerdings nötig sein, größere Objektmengen zu analysieren, so empfiehlt sich die Erhebung von Profildaten. Sie erlauben die bisher einzig befriedigende Beschreibung der Dimensionen mit Hilfe des Vektormodells. Dimensionsinterpretationen, die auf subjektiver Beurteilung beruhen, sind äußerst unbrauchbar, da sie zu Überinterpretationen der Konfigurationen führen können. Es besteht dabei die Gefahr, daß Informationen, die bereits vor der Untersuchung bekannt waren, in das Ergebnis hineinprojiziert werden und eine vorurteilsfreie Analyse ausschließen.

Wie in der Arbeit an Hand verschiedener Beispiele aufgezeigt worden ist, können die MDS-Verfahren umfangreiche Informationen zur Lösung von Marketingproblemen bereitstellen. Trotzdem kann die Entwicklung dieser Verfahren nicht als abgeschlossen bezeichnet werden. Es sollte eine Weiterentwicklung und Verfeinerung angestrebt werden, um die Aussagekraft dieser Methoden zu erhöhen. Folgende Problemstellungen sind bisher noch nicht zufriedenstellend erforscht, obwohl sie von besonderem praktischen Interesse sind, und stellen daher interessante Arbeitsgebiete für zukünftige Untersuchungen dar:

(a) Ansätze zur Dynamisierung der MDS-Modelle durch Einbeziehung der Zeitkomponente,

(b) Vergleiche zwischen MDS-Verfahren und anderen multivariaten Analysetechniken,

(c) Wirkungen alternativer Datenerhebungsmethoden auf das Skalierungsergebnis,

(d) Methoden zur Interpretation der Achsen,

(e) empirische Zusammenhänge zwischen Ähnlichkeiten von Produkten und dem daraus resultierenden Konsumentenverhalten.

Trotz dieser offenen Probleme ist die MDS durch bedeutende Vorteile gekennzeichnet, die eine insgesamt positive Beurteilung rechtfertigen: So ist eine zeit- und kostensparende Datenanalyse durch die benutzerfreundlichen Computerprogramme möglich. Die MDS erlaubt die Aufdeckung komplexer, räumlicher Strukturen, die in den Daten verborgen sind. Im Gegensatz zu anderen multivariaten Methoden liefern die mehrdimensionalen Skalierungstechniken häufig Lösungen für solche Dimensionenzahlen, die eine visuelle Überprüfung der Strukturen erlauben. Außerdem sind durch den synoptischen Charakter der MDS relativ wenige Kommunikationsschwierigkeiten zwischen Marktforschungsspezialisten und Unternehmensmanagement zu befürchten. Es ist mit Hilfe der MDS möglich, wesentliche Hinweise zur Aufstellung spezieller Zielformulierungen für den Absatzbereich einer Unternehmung zu liefern.

Zweifellos handelt es sich bei den dargestellten Methoden nicht um ein 'Patentrezept' zur Beseitigung der Unsicherheit

bei Marketingentscheidungen. Die MDS-Verfahren können aber die Entscheidungsqualität verbessern, da umfassende Analysen des Konsumentenverhaltens möglich sind. Die problemorientierte Interpretation der Resultate, die die MDS liefert, muß aber den speziellen Entscheidungsträgern, d.h. insbesondere den Marketingspezialisten, vorbehalten werden.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß der Einsatz der MDS, die ursprünglich für rein psychologische Fragestellungen entwickelt worden ist, auch im Marketingbereich einer Unternehmung sinnvoll und nützlich ist. Da insbesondere Marketingpraktiker häufig keinen detaillierten Einblick in diesen erfolgversprechenden Ansatz interdisziplinärer Forschung haben, wird das Informationsangebot der mehrdimensionalen Skalierung im Marketing noch nicht ausreichend genutzt.

Der Verfasser hofft, daß es ihm mit der vorliegenden Arbeit durch Anregungen, Hinweise und Weiterführungen gelungen ist, die Möglichkeiten und Grenzen der mehrdimensionalen Skalierung aufzuzeigen.

VERZEICHNIS DER SYMBOLE

(Das Verzeichnis bezieht sich nur auf solche Symbole, die häufig im Text wiederkehren)

$\vec{a}_t$	t-ter Eigenvektor
α	Schrittweite entlang des Gradienten
b_{jk}	Skalarprodukt zwischen Punkt j und k ($j,k \neq i$)
b_{ij}	Skalarprodukt zwischen Punkt i und j
B^{+}	n x n Matrix der Skalarprodukte b_{ij}
B_i	(n-1) x (n-1) Matrix der Skalarprodukte b_{jk} mit Origo im Punkt i
B^{++}	zentrierte n x n Matrix der Skalarprodukte mit Origo im Schwerpunkt
β_t	t-ter Eigenwert
c	additive Konstante
$\hat{c}$	Schätzwert für die additive Konstante
d	Abstandsfunktion
$\bar{d}$	arithmetisches Mittel der d_{ij}
d_{ij}	Abstand zwischen Punkt i und j
d^{o}_{ij}	Abstand zwischen Punkt i und j in der Ausgangskonfiguration
$\hat{d}_{ij}$	angepaßte Distanz zwischen Punkt i und j
$d^{(g)}_{ij}$	Abstand zwischen Punkt i und j für Vp g
$\hat{d}_z$	Wert des z-ten Blocks
D	n x n Matrix der d_{ij}
$\hat{D}$	n x n Matrix der $\hat{d}_{ij}$
δ	Kronecker Symbol
ΔS	Stressveränderung innerhalb einer Iteration
Δ_t	Distanz in der Dimension t
e_{ij}	Ähnlichkeit zwischen Objekt i und j
$\bar{e}_{ij}$	Unähnlichkeit zwischen Objekt i und j
f	funktionaler Zusammenhang
$\vec{g}$	Gradientenvektor
g_{it}	Komponente des Gradientenvektors
h_{ij}	intervallskalierte Distanz zwischen i und j

H	n x n Matrix der komparativen Distanzen h_{ij}
i	Index für Punkt bzw. Objekt i=1,2,...,n
j	Index für Punkt bzw. Objekt j=1,2,...,n
k	Index für Punkt bzw. Objekt k=1,2,...,n
$\bar{k}$	Streckungsfaktor
l	Index für Punkt l=1,2,...,n
μ	Gesamtzahl der Blöcke z=1,2,...,μ
n	Gesamtzahl der Objekte (Punkte)
n_g	Gesamtzahl der Vpn g=1,2,...,n_g
p	MINKOWSKI-Parameter
r	Anzahl der Dimensionen t=1,2,...,r
r'	Anzahl der großen Eigenwerte
S	n x n Matrix der Unähnlichkeitswerte $\bar{e}_{ij}$
S^+	Zähler des Stresskoeffizienten
S_1	Stress 1
S_2	Stress 2
t	Dimensionsindex t=1,2,...,r
T^+	Normierungsfaktor
w_{ij}	Gewichtungsfaktor für Objektpaar (i,j)
w_{gt}	Gewichtungsfaktor für die Dimension t durch Vp g
x_{it}	Koordinatenwert des Punktes i in Dimension t
x^o_{it}	Koordinatenwert des Punktes i in Dimension t bei der Ausgangskonfiguration
X	n x r Konfigurationsmatrix der Koordinaten x_{it}
X^{++}	n x n Konfigurationsmatrix mit Origo im Schwerpunkt
X_i	(n-1) x r Konfigurationsmatrix mit Origo im Punkt i
X^o	n x r Ausgangskonfigurationsmatrix
X^{opt}	n x r Endkonfigurationsmatrix
$y^{(g)}_{it}$	Koordinatenwert des Punktes i in der Dimension t für Vp g
z	Blockindex z=1,2,...,μ

LITERATURVERZEICHNIS

AAKER, D.A.: Multivariate analysis in marketing; theory and application, Belmont 1971.

AHRENS, H.J.: Multidimensionale Skalierung, Weinheim, Basel 1974.

AHRENS, H.J.: Zur Verwendung des Metrikparameters multidimensionaler Skalierungen bei der Analyse von Wahrnehmungsstrukturen, in: Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie, Bd. 19 (1972), S. 173-195.

ARNOLD, J.B.: A multidimensional scaling study of semantic distance, in: Journal of Experimental Psychology, Vol. 90 (1971), S. 349-372.

ATTNEAVE, F.: Dimensions of similarity, in: American Journal of Psychology, Vol. 63 (1950), S. 516-556.

BARNETT, N.L.: Developing effective advertising for new products, in: Journal of Advertising Research, wieder abgedruckt in: AAKER, D.A. (Hrsg.): Multivariate analysis in marketing; theory and application, Belmont 1971, S. 282-289.

BÄCHTHOLD, R.: Produkt-Positionierung, in: Klöti Wild Perspektiven, Kundenzeitschrift der Klöti Wild AG, Werbeagentur Zürich, Ausgabe 1 (Aug. 1973), S. 12-18.

BÄCHTHOLD, R.: Produktpositionierung und Kaufverhalten. Unveröffentlichtes Manuskript der PROOF-Gruppe für operationelle Marketing Forschung, Dübendorf Mai 1974.

BEALS, R., KRANTZ, D.H. und TVERSKY, A.: Foundations of multidimensional scaling, in: Psychological Review, Vol. 75 (1968), S. 127-142.

BENNET, J.F. und HAYS, W.L.: Multidimensional unfolding: Determing the dimensionality of ranked preference data, in: Psychometrika, Vol. 25 (1960), S. 27-43.

BIRDWELL, A.E.: A study of the influence of image congruence on consumer choice, in: Journal of Business, Vol. 41 (1968), S. 76-88.

BOOTH, A.D.: An application of the method of steepest descents to the solution of systems of non-linear simultaneous equations, in: Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. II (1949), S. 460-468.

BREITUNG, A.: Einsatz multivariater statistischer Verfahren in Marketing-Informationssystemen, in: MEFFERT, H. (Hrsg.): Marketing heute und morgen, Wiesbaden 1975, S. 127-151.

CAMPBELL, N.R.: An account of the principles of measurement and calculation, London 1938.

CARROLL, J.D.: Individual differences and multidimensional scaling, in: SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.D. (Hrsg.): Multidimensional scaling, Vol. I, Theory, New York, London 1972, S. 105-155.

CARROLL, J.D.: Models and methods for multidimensional preference analysis, handout for Bell-Penn MDS-Workshop (unveröffentlicht), Murray Hill o. Zeitangabe.

CARROLL, J.D.: An overview of multidimensional scaling methods emphasizing recently developed models for handling individual differences, in: KING, C.W. und TIGERT, D.J. (Hrsg.): Attitude research reaches new heights, Chicago 1971, S. 235-262.

CARROLL, J.D. und CHANG, J.J.: Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way Generalization of 'ECKART-YOUNG' decomposition, in: Psychometrika, Vol. 35 (1970), S. 283-319.

CARROLL, J.D. und CHANG, J.J.: A general index of nonlinear correlation and its application to the interpretation of multidimensional scaling solutions, in: American Psychologist, Vol. 19 (1964), S. 540.

CLIFF, N.: The 'idealized individual' interpretation of individual differences in multidimensional scaling, in: Psychometrika, Vol. 33, No. 2 (June 1968), S. 225-232.

COOMBS, C.H.: Psychological scaling without a unit of measurement, in: Psychological Review, Vol. 57 (1950), S. 145-158.

COOMBS, C.H.: A theory of data, New York 1964.

COOMBS, C.H., RAIFFA, H. und THRALL, P.M.: Some views on mathematical models and measurement theory, in: Psychological Review, Vol. 61 (1954), S. 132-144.

COOPER, L.G.: A new solution to the addition constant problem in metric multidimensional scaling, in: Psychometrika, Vol. 37 (1972), S. 311-323.

COXON, A.P.M.: The development and extensions of multidimensional scaling models, unveröffentlichtes Manuskript, University of Edinburgh, o. Zeitangabe, S. 1-22.

DICHTL, E.: Die Multivariatenanalyse im Dienste der Verhaltensforschung, in: HANSEN, H.R. (Hrsg.): Computergestützte Marketingplanung, München 1974, S. 74-107.

DILLER, H. und SCHOBERT, R.: Räumliche Repräsentation durch nicht-metrische mehrdimensionale Skalierung, in: Jahrbuch der Absatz- und Verbrauchsforschung, Heft 4, 19. Jg. (1973), S. 297-310.

DOEHLERT, D.H.: Similarity and preference mapping: A color example, in: AAKER, D.A. (Hrsg.): Multivariate analysis in marketing; theory and application, Belmont 1971, S. 290-298.

FAUMAN, B.C.: The semantics of product quality. A multidimensional scaling approach, in: Working Paper Series No. 7405, University of Rochester, Revised (March 1974), S. 1-15.

FRANK, R.E., MASSY, W.F. und WIND, Y.: Market segmentation, Prentice Hall 1972.

FRY, J.N. und CLAXTON, J.D.: Semantic differential and nonmetric multidimensional scaling descriptions of brand images, in: Journal of Marketing Research, Vol. VIII (May 1971), S. 238-240.

GATTY, R.: Multivariate analysis for marketing research: An evaluation, in: Applied Statistics, Vol. XV (1966), S. 157-172.

GREEN, P.E.: Marketing applications of MDS: Assesment and outlook, working paper, University of Pennsylvania, revised (July 1974), S. 1-25.

GREEN, P.E.: Measurement and data analysis, in: Journal of Marketing, Vol. 34 No. 1 (1970), S. 15-17.

GREEN, P.E.: Multidimensional model of product-features association, Reprint of Journal of Business Research, o. Zeitangabe, S. 107-118.

GREEN, P.E.: On the robustness of multidimensional scaling techniques, in: Journal of Marketing Research, Vol. XII (Febr. 1975), S. 73-81.

GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Marketing research applications of non-metric scaling methods, in: Operations Research Quarterly - Special Conference Issue, Vol. 21 (1973), S. 73-96.

GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling: An introduction and comparison of nonmetric unfolding techniques, in: Journal of Marketing, Vol. VI (Aug. 1969), S. 330-341.

GREEN, P.E. und CARMONE, F.J.: Multidimensional scaling and related techniques in marketing analysis, Boston 1970.

GREEN, P.E., CARMONE, F.J. und ROBINSON, P.J.: A comparison of perceptual mapping via confusions data and direct similarity judgements, in: KING, R.L. (Hrsg.): Proceedings of the Denver Conference of the American Marketing Association, Chicago 1968, S. 323-334.

GREEN, P.E. und MAHESHWARI, A.: A note on the multidimensional scaling of conditional proximity data, in: Journal of Marketing Research, Vol. VII (Febr. 1970), S. 106-110.

GREEN, P.E. und RAO, V.R.: A note on proximity measures and cluster analysis, in: Journal of Marketing Research, Vol. VI (Aug. 1969), S. 359-364.

GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Rating scales and information recovery - How many scales and response categories to use?, in: Journal of Marketing, Vol. 34 (July 1970), S. 33-39.

GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Applied multidimensional scaling, Winston 1972.

GREEN, P.E. und RAO, V.R.: Multidimensional scaling and individual differences, in: Journal of Marketing Research, Vol. VIII (Febr. 1971), S. 71-77.

GREEN, P.E. und TULL, D.S.: Research for marketing decisions, Prentice Hall 1970.

GREEN, P.E., WIND, Y. und JAIN, A.K.: A note on measurement of social-psychological belief systems, in: Journal of Marketing Research, Vol. IX (May 1972), S. 204-208.

GREENBERG, M.G.: Some applications of nonmetric multidimensional scaling, in: Proceedings of the 129th Annual Meeting of the American Statistical Association (1969), S. 104-109.

GULLIKSEN, H. und TUCKER, L.R.: A general procedure for obtaining paired comparisons from multiple rank orders, in: Psychometrika, Vol. 26, No. 2 (June 1961), S. 173-183.

GUTJAHR, W.: Die Messung psychischer Eigenschaften, Ost-Berlin 1972.

GUTTMAN, L.A.: Three GUTTMAN-LINGOES families of computer programs for nonmetric data analysis. O. Ort- und Zeitangabe, ausgehändigt durch: Bell Laboratories, Murray Hill (USA).

GUTTMAN, L.A.: A general nonmetric technique for finding the smallest coordinate space for a configuration of points, in: Psychometrika, Vol. 33 (1968), S. 469-506.

HENRY, W.A. und STUMPF, V.R.: Time and accuracy measures for alternative multidimensional scaling data collection methods, in: Journal of Marketing Research, Vol. XII (May 1975), S. 165-170.

HOLTMANN, D.: Multidimensionale Skalierung, Methode und ihre Anwendung in den Sozialwissenschaften, Diss., Köln 1974.

HOMAYOUNFAR, F.: Evaluation of market potential for new industrial products: An application of multidimensional scaling techniques, Diss., University of Stanford 1970.

HORAN, C.B.: Multidimensional scaling: Combining observations when individuals have different perceptual structures, in: Psychometrika, Vol. 34 (1969), S. 139-165.

JOHANNSEN, U.: Das Marken- und Firmenimage. Theorie Methodik, Praxis, Diss., Braunschweig 1968, Betriebswirtschaftliche Schriftenreihe, Heft 46, Berlin 1971.

JOHNSON, R.M.: Market segmentation - A strategic management tool, in: Journal of Marketing Research, Vol. IX (Febr. 1971), S. 13-18.

KING, C.W. und TIGERT, D.J.: Attitude research reaches new heights, Chicago 1971.

KINNEAR, T.C. und TAYLOR, J.C.: Multivariate methods in marketing research: A further attempt at classification, in: Journal of Marketing, Vol. 34 (Oct. 1971), S. 56-59.

KLAHR, D.: A study of consumer's cognitive structure for cigarette brands, in: Journal of Business, Vol. 44 (1971), S. 190-204.

KLINGBERG, F.L.: Studies in measurement of the relations among souvereign states, in: Psychometrika, Vol. 6 (Dec. 1941), S. 335-352.

KOTLER, P.: Marketing management, Englewood Cliffs 1967.

KRAUTTER, J.: Marketing - Entscheidungsmodelle, Wiesbaden 1973.

KRAUTTER, J.: Zum gegenwärtigen Stand der Entwicklung quantitativer Marketing-Modelle, in: Zeitschrift für Betriebswirtschaft, Nr. 10, 43. Jg. (1973), S. 723-746.

KRUSKAL, J.B.: Analysis of factorial experiments by estimating monotone transformations of the data, in: The Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 27 (1965), S. 251-263.

KRUSKAL, J.B.: Special problems and possibilities, Bell-Penn MDS-Workshop (unveröffentlicht), (June 1972), S. 1-12.

KRUSKAL, J.B.: Relationship of clustering to scaling and the interpretation of neighbourhoods, Bell-Penn Workshop on multidimensional scaling (unveröffentlicht), (June 1972), S. 1-8.

KRUSKAL, J.B.: Nonmetric multidimensional scaling: A numerical method, in: Psychometrika, Vol. 29, No. 2 (June 1964), S. 115-129.

KRUSKAL, J.B.: Multidimensional scaling by optimizing goodness of fit to a nonmetric hypothesis, in: Psychometrika, Vol. 29 (1964), S. 1-28.

LEHMANN, D.E.: Judged similarity and brand switching data as similarity measures, in: Journal of Marketing Research, Vol. IX (1972), S. 331-334.

LINGOES, J.C.: A general survey of the GUTTMAN-LINGOES nonmetric program series, in: SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B. (Hrsg.): Multidimensional scaling, Vol. I, Theory, New York und London 1972, S. 49-68.

LUER, G. und FILLBRANDT, H.: Ein Verfahren zur Bestimmung der additiven Konstanten in der multidimensionalen Skalierung, in: Archiv für die gesamte Psychologie, Bd. 121 (1969), S. 202-204.

LUER, G., OSTERLOH, W. und RUGE, A.: Versuche zur multidimensionalen Skalierung von subjektiven Reizähnlichkeiten auf Grund von Schätzurteilen, Entscheidungszeiten und Verwechslungshäufigkeiten beim Wiedererkennen, in:Psychologische Forschung, Bd. 33 (1970), S. 223-241.

McGEE, V.E.: Multidimensional scaling of N sets of similarity measures: A nonmetric individual differences approach, in: Multivariate Behavioral Research, Vol. 3 (1968), S. 233-248.

MEFFERT, H.: Marketing heute und morgen, Wiesbaden 1975.

MESSICK, S.J. und ABELSON, R.P.: The additive constant problem in multidimensional scaling, in: Psychometrika, Bd. 21 (1956), S. 1-15.

MICKO, H.C.: Räumliche Modelle für die multidimensionale Skalierung, in: MERZ, F. (Hrsg.): Bericht über den 25. Kongreß der Deutschen Gesellschaft für Psychologie, Münster 1966, S. 255-260.

MILLER, J.E., SHEPARD, R.N. und CHANG, J.J.: An analytical approach to the interpretation of multidimensional scaling solutions, in: American Psychologist, Vol. 19 (1964), S. 579-580.

MOINPOUR, R.: An empirical investigation of multidimensional scaling and multidimensional unfolding to predict brand purchasing behavior, Diss., Ohio State University 1970.

MOINPOUR, R. und MACLACHLAN, D.L.: Longitudinal measurement with multidimensional scaling, in: Combined Proceedings, Series No. 35 (1973), S.333-338.

NEIDELL, L.A.: Physician perception and evaluation of selected ethical drugs: An application of nonmetric multidimensional scaling to pharmaceutical marketing, Diss., University of Pennsylvania 1969.

NEIDELL, L.A.: Procedures for obtaining similarities data, in: Journal of Marketing Research, Vol. IX (Aug.1972), S. 335-337.

NEIDELL, L.A.: The use of nonmetric multidimensional scaling in marketing analysis, in: AAKER, D.A. (Hrsg.): Multivariate analysis in marketing; theory and application, Belmont 1971, S. 270-282.

NELSON, A.R.: Psyching psychographics. A look at why people buy, in: KING, C.W. und TIGERT, D.J. (Hrsg.): Attitude research reaches new heights, Chicago 1971, S. 181-188.

NIESCHLAG, R., DICHTL, E. und HOERSCHGEN, H.: Marketing, 4. Auflage, Berlin 1971.

NOELLE, E.: Umfragen in der Massengesellschaft; Einführung in die Methoden der Demoskopie, Hamburg 1963.

o. VERFASSER: Zur Einführung in die multivariate Datenanalyse, Infratest Forschungsservice, München 1974.

o. VERFASSER: Top Fifty - die 50 umsatzstärksten deutschen Werbeagenturen, in: Der Kontakter, märkte & medien verlagsgesellschaft mbh Hamburg, Vol. XV/5, Febr. 1975, S. 1-23, mit Beiblatt: TOP FIFTY-Liste.

o. VERFASSER: Zeitschriften-Profile - Die Positionierung von Zeitschriften im Imageraum, Ergebnisse einer Untersuchung im Auftrage von HÖR ZU und FUNK UHR, o.Ortsangabe, Juni 1975.

PERCY, L.H.: Multidimensional unfolding of profile data. A discussion and illustration with attention to badness of fit, in: Journal of Marketing Research, Vol. XII (Febr. 1975), S. 93-99.

RABINOWITZ, G.B.: An introduction to nonmetric multidimensional scaling, in: American Journal of Political Science, Vol. XIX (May 1975), S. 343-390.

RAO, V.R. und KATZ, R.: Alternative multidimensional scaling methods for large stimulus sets, in: Journal of Marketing Research, Vol. VIII (Nov. 1971), S. 488-494.

RICHARDSON, M.W.: Multidimensional psychophysics, in: Psychological Bulletin, Bd. 35 (1938), S. 659-660.

RITCHIE, J.R.B.: The identification of market segments through the application of an individual differences multidimensional scaling model, Diss., University of Western Ontario (1972).

ROSKAM, E. und LINGOES, J.C.: MINISSA - I: A FORTRAN IV (G) program for the smallest space analysis of square symmetric matrices,in: Behavioral science, Vol. 15 (March 1970), S. 204-205.

SCHEUCH, E.K.: Skalierungsverfahren in der Sozialforschung, in: KÖNIG, R. (Hrsg.): Handbuch der empirischen Sozialforschung, Bd. 1, Stuttgart 1962, S. 348-384.

SCHOBERT, R.: Die mehrdimensionale Skalierung als Instrument der Absatzforschung, in: Arbeitspapiere des Betriebswirtschaftlichen Instituts der Friedrich-Alexander Universität Erlangen-Nürnberg, Heft 27, Febr. 1975.

SCHREIBER, U.: Psychologische Marktsegmentierung mit Hilfe multivariater Verfahren, Diss., München 1973.

SHEPARD, R.N.: The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function, I, in: Psychometrika, Vol. 27 (1962) S. 125-140.

SHEPARD, R.N.: The analysis of proximities: Multidimensional scaling with an unknown distance function, II, in: Psychometrika, Vol. 27 (1962), S. 219-246.

SHEPARD, R.N.: Attention and the metric structure of the stimulus, in: Journal of Mathematical Psychology, Vol. 1 (Febr. 1964), S. 54-87.

SHEPARD, R.N.: Introduction, unveröffentlichtes Papier des Multidimensional Workshop, University of Pennsylvania (June 1972), S. 1-11.

SHEPARD, R.N.: Metric structures in ordinal data, in: Journal of Mathematical Psychology, Vol. 3 (1966), S. 287-315.

SHEPARD, R.N.: Representation of structure in similarity data: problems and prospects, in: Psychometrika, Vol. 39 (1974), S. 373-418.

SHEPARD, R.N.: A taxonomy of some principal types of data and of multidimensional methods for their analysis, in: SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B. (Hrsg.): Multidimensional scaling, Vol. I, Theory, New York und London 1972, S. 21-47.

SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B.: Multidimensional scaling, Vol. I, Theory, New York und London 1972.

SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B.: Multidimensional scaling, Vol. II, Applications, New York und London 1972.

SHERMAN, C.R.: Nonmetric multidimensional scaling: A MONTE CARLO study of the basic parameters, in: Psychometrika, Vol. 37 (1972), S. 323-355.

SHETH, J.N.: Multivariate analysis in Marketing, in: Journal of Advertising Research, Vol. 10, No. 1 (Febr. 1970), S. 29-38.

SHETH, J.N.: The multivariate revolution in marketing research, in: Journal of Marketing, Vol. 35 (Jan. 1971), S. 13-19.

SIXTL, F.: Meßmethoden der Psychologie, Weinheim 1967.

SIXTL, F. und WENDER, K.: Der Zusammenhang zwischen multidimensionaler Skalierung und Faktorenanalyse, in: Biometrische Zeitschrift, Bd. 6 (1964), S. 251-261.

SODEUR, W.: Empirische Verfahren zur Klassifikation, in: SCHEUCH, E.K. und SAHNER, H. (Hrsg.): Studienskripten zur Soziologie, Bd. 42, Stuttgart 1974.

SPANG, H.A.: A review of minimization techniques for nonlinear functions, in: Review of the Society for Industrial and Applied Mathematics, Vol. 4 (1962) S. 343-365.

STADTLER, K. und BRUNIECKI, A.: MMDS-Metrische multidimensionale Skalierung, in: Infratest Modelle und Methoden, München 1973.

STEFFLRE, V.J.: Some applications of multidimensional scaling to social science problems, in:SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B. (Hrsg.): Multidimensional scaling, Vol. II, Applications, New York und London 1972, S. 211-243.

STEFFLRE, V.J.: Market structure studies. New products for old markets and new markets for old products, in: BASS, F., KING, C.W. und PESSEMIER, E.E. (Hrsg.): Applications of the science in marketing management, New York 1968, S. 251-268.

TIETZ, B.: Grundlagen der Handelsforschung, Bd.1: Die Methoden, Zürich 1969.

TORGERSON, W.S.: Theory and methods of scaling, New York, London und Sidney 1958.

TORGERSON, W.S.: Multidimensional scaling I. Theory and method, in: Psychometrika, Bd. 17 (1952), S. 401-419.

TORGERSON, W.S.: Multidimensional scaling of similarity, in: Psychometrika, Vol. 30 (1965), S. 379-393.

TUCKER, L.R. und MESSICK, S.: An individual differences model for multidimensional scaling, in: Psychometrika, Vol. 28 (1963), S. 333-367.

WAGENAAR, W.A. und PADMOS, P.: Quantitative interpretation of stress in KRUSKAL's multidimensional scaling technique, in: British Journal of Mathematical and Statistical Psychology, Vol. 24 (1971), S. 101-110.

WENDER, K.: Die psychologische Interpretation nichteuklidischer Metriken in der multidimensionalen Skalierung, Diss., Darmstadt 1969.

WENDER, K.: Die Metrik der multidimensionalen Skalierung als Funktion der Urteilsgeschwindigkeit, in: Zeitschrift für experimentelle und angewandte Psychologie, Bd. 18 (1971), S. 166-182.

WIND, Y. und ROBINSON, P.J.: Product positioning: An application of multidimensional scaling, Paper prepared for the fourth Attitude Research Conference of the American Marketing Association, St. Thomas, October 30, 1971, S. 1-19.

WISH, M.: Brief comments about dimensionality, Bell Laboratories, Murray Hill, (unveröffentlicht) o.Zeitangabe, S. 1-4.

WISH, M.: Notes on the variety, appropriateness and choice of proximity measures. Unveröffentlichtes Papier der Bell Laboratories, Murray Hill 1972, S. 1-26 mit Anhang.

YOUNG, F.W.: A model for polynomial conjoint analysis algorithms, in: SHEPARD, R.N., ROMNEY, A.K. und NERLOVE, S.B. (Hrsg.): Multidimensional scaling, Vol. I, Theory, New York und London 1972, S. 69-104.

YOUNG, F.W.: TORSCA, an IBM program for nonmetric multidimensional scaling, in: Journal of Marketing Research, Vol. 5 (Aug. 1968), S. 319-321.

YOUNG, G. und HOUSEHOLDER, A.S.: Discussion of set of points in terms of their mutual distances, in: Psychometrika, Vol. 3 (March 1938), S. 19-22

ANHANG

PARTIELLE ABLEITUNG DER STRESSFUNKTION NACH DEN KOORDINATENWERTEN

Um die Koordinatenwerte von verbesserten Konfigurationen festlegen zu können, muß der Stress verringert werden. Hier soll ausführlich dargestellt werden, wie der Stress

$$S_1 = \sqrt{\frac{S^+}{T^+}} = \sqrt{\frac{\sum (d_{ij} - \hat{d}_{ij})^2}{\sum (d_{ij})^2}} \longrightarrow \min \qquad (1)$$

minimiert werden kann[1]. Bezeichnet man mit

$$x \in \left\{ x_{kt} : k=1,2,\ldots,n;\ t=1,2,\ldots,r \right\} ,$$

so kann mit Hilfe der Quotientenregel die erste partielle Ableitung $\partial S_1 / \partial x$ der Stressfunktion S_1 nach dem Koordinatenwert x_{kt} des Punktes k in der Dimension t gebildet werden.

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{S_1}{S^+} \frac{\partial S^+}{\partial x} - \frac{S_1}{T^+} \frac{\partial T^+}{\partial x} \right] \qquad (2)$$

Für die partielle Ableitung $\partial S^+ / \partial x$ des Zählers der Stressfunktion gilt:

$$\frac{\partial S^+}{\partial x} = 2 \sum \left[(d_{ij} - \hat{d}_{ij}) \left(\frac{\partial d_{ij}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{d}_{ij}}{\partial x} \right) \right] \qquad (3)$$

Nach KRUSKAL[2] vereinfacht sich bei Berechnung der angepaßten Distanzen $\hat{d}_{ij}$ mit Hilfe der monotonen Regression der Ausdruck (3) zu (4), da $\partial \hat{d}_{ij} / \partial x = 0$ ist:

---

1 Wenn nichts anderes ausdrücklich angegeben ist, gilt

$$\sum = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} .$$

Vgl. HOLTMANN, D.: Multidimensionale Skalierung, Methode und ihre Anwendung in den Sozialwissenschaften, a.a.O.,S.174 f.

2 KRUSKAL, J.B.: Analysis of factorial experiments by estimating monotone transformations of the data, in: The Journal of the Royal Statistical Society, Vol. 27 (1965), S.251-263.

$$\frac{\partial S^+}{\partial x} = 2\sum (d_{ij} - \hat{d}_{ij}) \frac{\partial d_{ij}}{\partial x} \qquad (4)$$

Die partielle Ableitung $\partial T^+ / \partial x$ des Nenners der Stressfunktion ergibt

$$\frac{\partial T^+}{\partial x} = 2\sum d_{ij} \frac{\partial d_{ij}}{\partial x} . \qquad (5)$$

Nach Gleichung (4) und (5) müssen noch die partiellen Ableitungen $\partial d_{ij} / \partial x$ der Distanzfunktion d_{ij} nach den Koordinatenwerten x gebildet werden. Für die Distanzfunktion wird eine MINKOWSKI-Metrik[1] der Form

$${}_p d_{ij} = \sum_t^r \left[|x_{it} - x_{jt}|^p \right]^{1/p} \qquad 1 \leq p \leq \infty$$

unterstellt. Bildet man ihre partielle Ableitung nach den Koordinatenwerten x_{kt}, so ergibt sich

$$\frac{\partial d_{ij}}{\partial x_{kt}} = \left[\frac{|x_{it} - x_{jt}|}{d_{ij}} \right]^{p-1} \text{sign}\,(x_{it} - x_{jt}) \, (\delta^{ki} - \delta^{kj}). \qquad (6)$$

In Gleichung (6) ist p der MINKOWSKI-Parameter und für sign $(x_{it} - x_{jt})$ gilt:

$$\text{sign}(x_{it} - x_{jt}) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x_{it} > x_{jt} \\ 0 & \text{falls } x_{it} = x_{jt} \\ -1 & \text{falls } x_{it} < x_{jt} \end{cases}$$

Das Zeichen δ^{ki} bzw. δ^{kj} ist das sog. KRONECKER-Symbol.

$$\delta^{ik} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{falls } i \neq k \end{cases} ; \quad \delta^{jk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$$

---

1 Vgl. Abschnitt 4.2 dieser Arbeit.

Wird Gleichung (6) in (4) eingesetzt, so ergibt sich

$$\frac{\partial S^+}{\partial x_{kt}} = 2\sum (d_{ij}-\hat{d}_{ij}) \left(\frac{|x_{it}-x_{jt}|}{d_{ij}}\right)^{p-1} \operatorname{sign}(x_{it}-x_{jt})(\delta^{ki}-\delta^{kj}). \qquad (7)$$

Durch Einsetzen von (6) in (5) erhält man

$$\frac{\partial T^+}{\partial x_{kt}} = 2\sum d_{ij} \left(\frac{|x_{it}-x_{jt}|}{d_{ij}}\right)^{p-1} \operatorname{sign}(x_{it}-x_{jt})(\delta^{ki}-\delta^{kj}). \qquad (8)$$

Für die partielle Ableitung $\partial S_1 / \partial x_{kt}$ gilt dann durch Einsetzen **von Gleichung** (7) und (8) in (2) die Gleichung (9).

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_{kt}} = \frac{1}{2}\,\frac{S_1}{S^+} \cdot 2\sum (d_{ij}-\hat{d}_{ij}) \left(\frac{|x_{it}-x_{jt}|}{d_{ij}}\right)^{p-1} \operatorname{sign}(x_{it}-x_{jt}) \cdot (\delta^{ki}-\delta^{kj}) - \frac{S_1}{T^+} \cdot 2\sum d_{ij} \left(\frac{|x_{it}-x_{jt}|}{d_{ij}}\right)^{p-1} \cdot \operatorname{sign}(x_{it}-x_{jt})(\delta^{ki}-\delta^{kj}) \qquad (9)$$

Gleichung (9) vereinfacht sich durch Ausmultiplizieren und Ausklammern zu (10).

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_{kt}} = S_1 \sum (\delta^{ki}-\delta^{kj}) \left[\frac{(d_{ij}-\hat{d}_{ij})}{S^+} - \frac{d_{ij}}{T^+}\right] \left[\frac{|x_{it}-x_{jt}|}{d_{ij}}\right]^{p-1} \cdot \operatorname{sign}(x_{it}-x_{jt}) \qquad (10)$$

LEBENSLAUF

Mölders, Axel	4788 Warstein, Schorenweg 24
Geburtstag	30. Juni 1950
Geburtsort	Dortmund
Staatsangehörigkeit	deutsch
Eltern	Victor Mölders, selbständiger Architekt, Maris Mölders, geb. Happe
Schulen	April 1956 bis April 1960: St. Pankratius Volksschule in Warstein April 1960 bis Juni 1966: Städtisches Neusprachliches Gymnasium in Warstein Juni 1966 bis Mai 1968: Wirtschaftsgymnasium Colleg Burg Eringerfeld
Reifeprüfung	17. Mai 1968 in Eringerfeld
Studiengang	Oktober 1968 bis Oktober 1973: Studium der Betriebswirtschaftslehre an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster
Studienabschluß	21. Oktober 1973: Prüfung für Diplom-Kaufleute
Berufspraxis	Oktober 1973 bis September 1976: Wissenschaftlicher Tutor am Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster Seit dem 1. Oktober 1976 Marketing-Assistent bei der Firma Henkel & Cie GmbH, Düsseldorf